풍산자

유형기본서

수학Ⅱ

정답과 풀이

01 함수의 극한

개념확인 8~9쪽

01 답 (1) 3 (2) 6 (3) 4 (4) 발산(∞)

02 답 (1) 0 (2) 2

03 답 (1) 3 (2) 2

04 답 (1) 4 (2) -2

05 답 (1) -2 (2) -3

(1) $x \longrightarrow 1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

따라서 $\lim_{x\to 1}(2x+a)=2+a=0$이므로

$a=-2$

(2) $x \longrightarrow 3$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

따라서 $\lim_{x\to 3}(x+a)=3+a=0$이므로

$a=-3$

06 답 2

모든 실수 x에 대하여 $-2x \le f(x) \le x^2+1$이고

$\lim_{x\to -1}(-2x)=2$, $\lim_{x\to -1}(x^2+1)=2$이므로

$\lim_{x\to -1} f(x)=2$

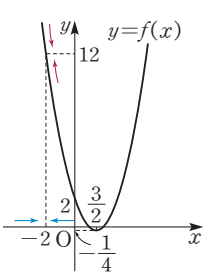
필수유형 01 11쪽

01-1 답 (1) 12 (2) $2\sqrt{2}$ (3) 발산(∞) (4) 0

해결전략 | 그래프를 그려 극한값을 확인한다.

(1) $f(x)=x^2-3x+2$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 12에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to -2}(x^2-3x+2)=12$



◉→ 다른 풀이

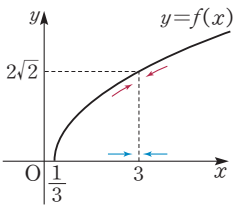
$f(x)=x^2-3x+2$에 $x=-2$를 대입하면

$f(-2)=(-2)^2-3\times(-2)+2=12$

$\therefore \lim_{x\to -2}(x^2-3x+2)=12$

(2) $f(x)=\sqrt{3x-1}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $2\sqrt{2}$에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 3}\sqrt{3x-1}=2\sqrt{2}$



◉→ 다른 풀이

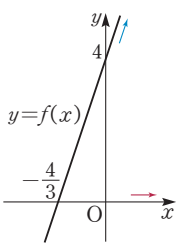
$f(x)=\sqrt{3x-1}$에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=\sqrt{3\times 3-1}=2\sqrt{2}$

$\therefore \lim_{x\to 3}\sqrt{3x-1}=2\sqrt{2}$

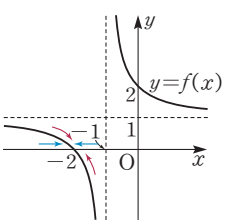
(3) $f(x)=3x+4$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 양의 무한대로 발산하므로

$\lim_{x\to\infty}(3x+4)=\infty$



(4) $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+1$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x+1}=0$



◉→ 다른 풀이

$f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$에 $x=-2$를 대입하면

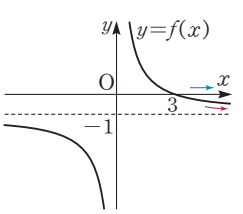
$f(-2)=\dfrac{-2+2}{-2+1}=0$

$\therefore \lim_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x+1}=0$

01-2 답 (1) -1 (2) 발산(∞) (3) 발산($-\infty$)

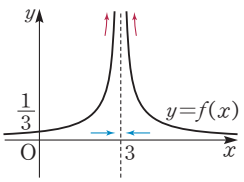
해결전략 | 그래프를 그려 극한값을 확인한다.

(1) $f(x)=\dfrac{3-x}{x}=\dfrac{3}{x}-1$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로



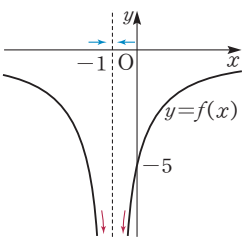
$\lim_{x\to\infty}\dfrac{3-x}{x}=-1$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{|x-3|}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 3에서 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 양의 무한대로 발산하므로



$\lim_{x\to3}\dfrac{1}{|x-3|}=\infty$

(3) $f(x)=-\dfrac{5}{(x+1)^2}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음의 무한대로 발산하므로



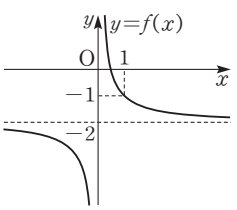
$\lim_{x\to-1}\left\{-\dfrac{5}{(x+1)^2}\right\}=-\infty$

01-3 답 -3

해결전략 | 두 극한값을 각각 구하여 더한다.

STEP 1 $\lim_{x\to1}\dfrac{1-2x}{x}$의 값 구하기

$f(x)=\dfrac{1-2x}{x}=\dfrac{1}{x}-2$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로



$\lim_{x\to1}\dfrac{1-2x}{x}=-1$

STEP 2 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{x}$의 값 구하기

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 -2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{x}=-2$

STEP 3 $\lim_{x\to1}\dfrac{1-2x}{x}+\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{x}$의 값 구하기

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{1-2x}{x}+\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{x}=-1-2=-3$

◉→ 다른 풀이

STEP 1 $\lim_{x\to1}\dfrac{1-2x}{x}$의 값 구하기

$f(x)=\dfrac{1-2x}{x}$에 $x=1$을 대입하면

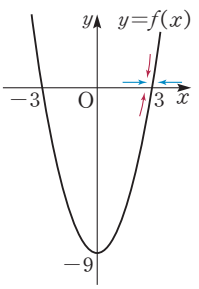
$f(1)=\dfrac{1-2\times1}{1}=-1$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{1-2x}{x}=-1$

01-4 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

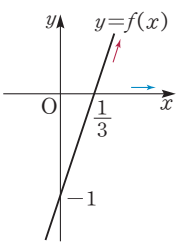
해결전략 | 그래프를 그려 극한값이 존재하는지 확인한다.

ㄱ. $f(x)=x^2-9$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로



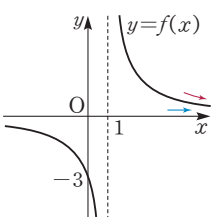
$\lim_{x\to3}(x^2-9)=0$

ㄴ. $f(x)=3x-1$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 양의 무한대로 발산하므로



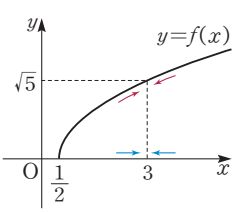
$\lim_{x\to\infty}(3x-1)=\infty$ (발산)

ㄷ. $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$으로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 가까워지므로



$\lim_{x\to\infty}\dfrac{3}{x-1}=0$

ㄹ. $f(x)=\sqrt{2x-1}$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\sqrt{5}$에 한없이 가까워지므로



$\lim_{x\to3}\sqrt{2x-1}=\sqrt{5}$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

◉→ 다른 풀이

ㄱ. $f(x)=x^2-9$에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=3^2-9=0$

$\therefore \lim_{x\to3}(x^2-9)=0$

ㄹ. $f(x)=\sqrt{2x-1}$에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=\sqrt{2\times3-1}=\sqrt{5}$

$\therefore \lim\limits_{x\to3}\sqrt{2x-1}=\sqrt{5}$

01-5 답 ③

해결전략 | 함수식에 $x=a$를 대입하여 극한값을 구한다.

① $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2+x}{4}=\dfrac{2+3}{4}=\dfrac{5}{4}$

② $\lim\limits_{x\to0}3=3$

③ $\lim\limits_{x\to-2}\sqrt{2x+8}=\sqrt{2\times(-2)+8}=\sqrt{4}=2$

④ $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-5}{x+5}=\dfrac{2\times4^2-5}{4+5}=\dfrac{27}{9}=3$

⑤ $\lim\limits_{x\to2}(x-2)(x+3)=0\times5=0$

따라서 옳은 것은 ③이다.

01-6 답 −12

해결전략 | 극한값을 이용하여 연립방정식을 세워 푼다.

STEP 1 극한값을 이용하여 연립방정식 만들기

$\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=-1$이므로

$2^2+2a+b=-1$

$\therefore 2a+b=-5$ …… ㉠

$\lim\limits_{x\to-1}(x^2+bx+a)=-6$이므로

$(-1)^2-b+a=-6$

$\therefore a-b=-7$ …… ㉡

STEP 2 ab의 값 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=3$

$\therefore ab=(-4)\times3=-12$

필수유형 02 13쪽

02-1 답 (1) 0 (2) 3 (3) 0 (4) 0 (5) 0

해결전략 | 그래프에서 좌극한, 우극한에 대한 x의 값의 범위를 확인하여 극한값을 구한다.

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$f(-1)=0$

(2) x가 -1보다 작은 값을 가지면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=3$

(3) x가 -1보다 큰 값을 가지면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=0$

(4) x가 -4보다 작은 값을 가지면서 -4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to-4-}f(x)=0$

(5) x가 -4보다 큰 값을 가지면서 -4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x\to-4+}f(x)=0$

02-2 답 2

해결전략 | 좌극한, 우극한에 대한 x의 값의 범위를 확인하여 극한값을 구한다.

STEP 1 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)$의 값 구하기

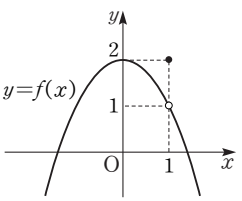
$x\longrightarrow1-$일 때, $f(x)\longrightarrow1$

이므로 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=1$

STEP 2 $\lim\limits_{x\to1+}f(x)$의 값 구하기

$x\longrightarrow1+$일 때, $f(x)\longrightarrow1$

이므로 $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$



STEP 3 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)$의 값 구하기

$\therefore \lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1+1=2$

02-3 답 2

해결전략 | 구해야 하는 함숫값, 극한값을 그래프를 이용하여 찾는다.

STEP 1 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)$의 값 구하기

또, $x\longrightarrow1-$일 때, $f(x)\longrightarrow2$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=2$

STEP 2 $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)$의 값 구하기

$x\longrightarrow-1+$일 때, $f(x)\longrightarrow0$이므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=0$

STEP 3 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to-1+}f(x)$의 값 구하기

$\therefore \lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=2+0=2$

02-4 답 3

해결전략 | 각 극한값을 x의 값의 범위에 따라 구하여 주어진 등식에 대입한다.

STEP 1 좌극한, 우극한 구하기

$x<2$일 때, $f(x)=ax-3$이므로

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(ax-3)=2a-3$

$x\geq 2$일 때, $f(x)=x^2+x-a$이므로

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2+x-a)=6-a$

STEP 2 a의 값 구하기

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)$이므로

$2a-3=6-a$, $3a=9$

$\therefore a=3$

02-5 답 (1) -1 (2) 0 (3) 1 (4) 0

해결전략 | 주어진 함수의 특징을 확인하여 극한값을 구한다.

(1) $-1\leq x<0$일 때, $[x]=-1$

$\therefore \lim_{x\to 0-}[x]=\lim_{x\to 0-}(-1)=-1$

(2) $0\leq x<1$일 때, $[x]=0$

$\therefore \lim_{x\to 0+}[x]=\lim_{x\to 0+}0=0$

(3) $0<x<1$일 때, $1<2-x<2$이므로

$[2-x]=1$

$\therefore \lim_{x\to 1-}[2-x]=\lim_{x\to 1-}1=1$

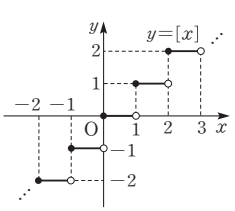
(4) $1<x<2$일 때, $0<2-x<1$이므로

$[2-x]=0$

$\therefore \lim_{x\to 1+}[2-x]=\lim_{x\to 1+}0=0$

풍쌤의 비법

가우스 함수 $y=[x]$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $[x]$의 값은 항상 정수이며, x의 값이 정수일 때 좌극한, 우극한이 서로 다르다.



02-6 답 -2

해결전략 | x의 값의 범위에 따른 좌극한과 우극한을 각각 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$x<-1$일 때, $|x+1|=-(x+1)$이므로

$\lim_{x\to -1-}\frac{x+1}{|x+1|}=\lim_{x\to -1-}\frac{x+1}{-(x+1)}=-1$

$\therefore a=-1$

STEP 2 b의 값 구하기

$x>-1$일 때, $|x+1|=x+1$이므로

$\lim_{x\to -1+}\frac{x+1}{|x+1|}=\lim_{x\to -1+}\frac{x+1}{x+1}=1$

$\therefore b=1$

STEP 3 $a-b$의 값 구하기

$\therefore a-b=-1-1=-2$

◉→ 다른 풀이

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$f(x)=\frac{x+1}{|x+1|}=\begin{cases}1 & (x\geq -1)\\ -1 & (x<-1)\end{cases}$

STEP 2 $a-b$의 값 구하기

$a=\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-}(-1)=-1$

$b=\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+}1=1$

$\therefore a-b=-2$

필수유형 03 15쪽

03-1 답 1

해결전략 | $x=2$에서의 좌극한, 우극한을 구하여 같은지 확인한다.

$\lim_{x\to 2-} f(x)=1$, $\lim_{x\to 2+} f(x)=1$

즉, $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)$이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=1$

03-2 답 -1

해결전략 | 극한값이 존재하려면 좌극한과 우극한이 같아야 한다.

STEP 1 좌극한, 우극한 구하기

$x<-1$일 때, $f(x)=(x-k)^2$이므로

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-}(x-k)^2=(-1-k)^2$

$x\geq -1$일 때, $f(x)=-3x+k$이므로

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+}(-3x+k)=3+k$

STEP 2 k의 값 구하기

$\lim_{x\to -1} f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)$이어야 하므로

$(-1-k)^2=3+k$, $k^2+k-2=0$

$(k+2)(k-1)=0$ $\therefore k=-2$ 또는 $k=1$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-2+1=-1$

03-3 답 (1) 0 (2) 존재하지 않는다. (3) 0

해결전략 | 좌극한과 우극한을 비교한다.

(1) $x<1$일 때, $|x-1|=-x+1$이므로

$\lim_{x\to1-}|x-1|=\lim_{x\to1-}(-x+1)=0$

$x>1$일 때, $|x-1|=x-1$이므로

$\lim_{x\to1+}|x-1|=\lim_{x\to1+}(x-1)=0$

즉, $\lim_{x\to1-}|x-1|=\lim_{x\to1+}|x-1|$이므로

$\lim_{x\to1}|x-1|=0$

(2) (1)에 의하여

$$\lim_{x\to1-}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1-}\frac{x-1}{-(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1-}(-1)=-1$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}1=1$$

따라서 $\lim_{x\to1-}\frac{x-1}{|x-1|}\neq\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{|x-1|}$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{|x-1|}$의 값은 존재하지 않는다.

(3) $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로

$\lim_{x\to0-}x|x|=\lim_{x\to0-}(-x^2)=0$

$x>0$일 때, $|x|=x$이므로

$\lim_{x\to0+}x|x|=\lim_{x\to0+}x^2=0$

즉, $\lim_{x\to0-}x|x|=\lim_{x\to0+}x|x|$이므로

$\lim_{x\to0}x|x|=0$

03-4 답 존재하지 않는다.

해결전략 | 좌극한과 우극한을 비교한다.

STEP 1 $x=2$에서의 $f(x)$의 좌극한 구하기

$1\le x<2$일 때, $f(x)=[x]=1$이므로

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}1=1$

STEP 2 $x=2$에서의 $f(x)$의 우극한 구하기

$2\le x<3$일 때, $f(x)=[x]=2$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}2=2$

STEP 3 $x=2$에서의 $f(x)$의 극한 조사하기

따라서 $\lim_{x\to2-}f(x)\neq\lim_{x\to2+}f(x)$이므로 $x=2$에서의 $f(x)$의 극한값은 존재하지 않는다.

03-5 답 5

해결전략 | 극한값이 존재하므로 좌극한과 우극한이 같음을 이용한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$\lim_{x\to-1}f(x)=b$로 극한값이 존재하므로 $x=-1$에서의 좌극한과 우극한이 같다.

$x<-1$일 때, $f(x)=-3x+a$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(-3x+a)=3+a$

$x\ge-1$일 때, $f(x)=x^2-a$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(x^2-a)=1-a$

따라서 $3+a=1-a$이므로

$2a=-2$ $\therefore a=-1$

STEP 2 b의 값 구하기

$a=-1$이므로 $x=-1$에서의 극한값은

$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1-}(-3x-1)=\lim_{x\to-1+}(x^2+1)=2$

$\therefore b=2$

STEP 3 a^2+b^2의 값 구하기

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$

03-6 답 4

해결전략 | 함수가 달라지는 경계인 $x=0$, $x=4$에서 $f(x)$, $|f(x)|$의 극한값이 존재하는지 좌극한과 우극한을 비교하여 알아본다.

STEP 1 함수 $f(x)$의 $x=0$에서의 극한 조사하기

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(-x)=0$,

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x^2-4x+2)=2$

이므로 $\lim_{x\to0-}f(x)\neq\lim_{x\to0+}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

STEP 2 함수 $|f(x)|$의 $x=0$에서의 극한 조사하기

$\lim_{x\to0-}|f(x)|=\lim_{x\to0-}|-x|=0$,

$\lim_{x\to0+}|f(x)|=|x^2-4x+2|=2$

이므로 $\lim_{x\to0-}|f(x)|\neq\lim_{x\to0+}|f(x)|$

따라서 $\lim_{x\to0}|f(x)|$의 값은 존재하지 않는다.

STEP 3 함수 $f(x)$의 $x=4$에서의 극한 조사하기

$\lim_{x\to4-}f(x)=\lim_{x\to4-}(x^2-4x+2)=2$,

$\lim_{x\to4+}f(x)=\lim_{x\to4+}(-2)=-2$

이므로 $\lim_{x\to4-}f(x)\neq\lim_{x\to4+}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to4}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

STEP 4 함수 $|f(x)|$의 $x=4$에서의 극한 조사하기

$\lim_{x\to4-}|f(x)|=\lim_{x\to4-}|x^2-4x+2|=2$,

$\lim_{x\to4+}|f(x)|=\lim_{x\to4+}|-2|=2$

이므로 $\lim_{x\to4-}|f(x)|=\lim_{x\to4+}|f(x)|$

즉, $\lim_{x\to4}|f(x)|$의 값은 존재한다.

따라서 구하는 a의 값은 4이다.

발전유형 04 17쪽

04-1 답 (1) 1 (2) −1 (3) −1 (4) 1

해결전략 | 함수의 변수를 조사하여 변수의 움직임, 변화를 확인하여 극한값을 구한다.

(1) $g(x)=t$라고 하면 $x\longrightarrow1+$일 때, $t\longrightarrow1+$이므로
$\lim_{x\to1+}f(g(x))=\lim_{t\to1+}f(t)=1$

(2) $g(x)=t$라고 하면 $x\longrightarrow1-$일 때, $t\longrightarrow-1+$이므로 $\lim_{x\to1-}f(g(x))=\lim_{t\to-1+}f(t)=-1$

(3) $f(x)=t$라고 하면 $x\longrightarrow-1-$일 때, $t=-1$이므로
$\lim_{x\to-1-}g(f(x))=g(-1)=-1$

(4) $f(x)=t$라고 하면 $x\longrightarrow-1+$일 때, $t\longrightarrow-1+$이므로 $\lim_{x\to-1+}g(f(x))=\lim_{t\to-1+}g(t)=1$

04-2 답 5

해결전략 | 그래프를 이용하여 합성함수의 극한값을 구한다.

STEP 1 $\lim_{x\to0+}f(f(x))$의 값 구하기

$f(x)=t$라고 하면 $x\longrightarrow0+$일 때, $t\longrightarrow3-$이므로
$\lim_{x\to0+}f(f(x))=\lim_{t\to3-}f(t)=3$

STEP 2 $\lim_{x\to2+}f(f(x))$의 값 구하기

또, $x\longrightarrow2+$일 때, $t=3$이므로
$\lim_{x\to2+}f(f(x))=f(3)=2$

STEP 3 $\lim_{x\to0+}f(f(x))+\lim_{x\to2+}f(f(x))$의 값 구하기

$\therefore\ \lim_{x\to0+}f(f(x))+\lim_{x\to2+}f(f(x))=3+2=5$

04-3 답 18

해결전략 | 함수의 변수를 치환하여 극한값을 구한다.

STEP 1 $\lim_{x\to1}f(x-2)$의 값 구하기

$x-2=t$라고 하면 $x\longrightarrow1$일 때, $t\longrightarrow-1$이므로
$\lim_{x\to1}f(x-2)=\lim_{t\to-1}f(t)=f(-1)=3$

STEP 2 $\lim_{x\to3}f(-x)$의 값 구하기

$-x=s$라고 하면 $x\longrightarrow3$일 때, $s\longrightarrow-3$이므로
$\lim_{x\to3}f(-x)=\lim_{s\to-3}f(s)=f(-3)=15$

STEP 3 $\lim_{x\to1}f(x-2)+\lim_{x\to3}f(-x)$의 값 구하기

$\therefore\ \lim_{x\to1}f(x-2)+\lim_{x\to3}f(-x)=3+15=18$

04-4 답 2, 6

해결전략 | 극한값이 존재하므로 좌극한과 우극한이 같음을 이용한다.

STEP 1 좌극한, 우극한 구하기

$x<a$일 때, $f(x)=-2x+6$이므로
$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(-2x+6)=-2a+6$
$\therefore\ \lim_{x\to a-}g(f(x))=(-2a+6)^2$

$x\geq a$일 때, $f(x)=2x-a$이므로
$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(2x-a)=a$
$\therefore\ \lim_{x\to a+}g(f(x))=a^2$

STEP 2 a의 값 구하기

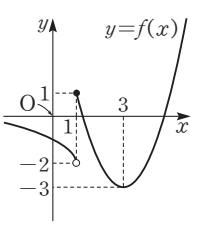
$\lim_{x\to a}g(f(x))$의 값이 존재하므로
$(-2a+6)^2=a^2$
$(-2a+6)^2-a^2=0$
$(-2a+6+a)(-2a+6-a)=0$
$(-a+6)(-3a+6)=0$
$(a-2)(a-6)=0$
$\therefore\ a=2$ 또는 $a=6$

04-5 답 −2

해결전략 | 그래프를 이용하여 합성함수의 극한값을 구한다.

$f(x)=t$라고 하면 $x\longrightarrow1+$일 때, $t\longrightarrow1-$이므로

$$\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=\lim_{t\to1-}\frac{2}{t-2}=-2$$



04-6 답 −2

해결전략 | 좌극한과 우극한을 비교한다.

STEP 1 $\lim_{x\to1-}\{f(x)-f(-x)\}$의 값 구하기

$-x=t$라고 하면 $x\longrightarrow1-$일 때, $t\longrightarrow-1+$이므로
$\lim_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}f(-x)=\lim_{t\to-1+}f(t)=3$
$\therefore\ \lim_{x\to1-}\{f(x)-f(-x)\}=1-3=-2$

STEP 2 $\lim_{x\to1+}\{f(x)-f(-x)\}$의 값 구하기

또, $x\longrightarrow1+$일 때, $t\longrightarrow-1-$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=0$, $\lim_{x\to1+}f(-x)=\lim_{t\to-1-}f(t)=2$

$\therefore \lim_{x\to1+}\{f(x)-f(-x)\}=0-2=-2$

STEP 3 $\lim_{x\to1}\{f(x)-f(-x)\}$의 값 구하기

따라서 좌극한과 우극한이 같으므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)-f(-x)\}=-2$

풍쌤의 비법

$\lim_{x\to1}f(x)$와 $\lim_{x\to1}f(-x)$의 값은 각각 존재하지 않지만

$\lim_{x\to1}\{f(x)-f(-x)\}$의 값은 존재한다.

필수유형 05 19쪽

05-1 답 (1) 2 (2) $-\frac{7}{2}$

해결전략 | 함수의 극한에 대한 성질을 이용한다.

(1) STEP 1 $\lim_{x\to2}g(x)$의 값 구하기

$$\lim_{x\to2}3g(x)=\lim_{x\to2}\{3g(x)-f(x)+f(x)\}$$
$$=\lim_{x\to2}\{3g(x)-f(x)\}+\lim_{x\to2}f(x)$$
$$=2+4=6$$

$\therefore \lim_{x\to2}g(x)=2$

STEP 2 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값 구하기

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to2}f(x)}{\lim_{x\to2}g(x)}=\frac{4}{2}=2$

(2) (1)에 의하여 $\lim_{x\to2}g(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{2f(x)+3g(x)}{4g(x)-3f(x)}$$
$$=\frac{\lim_{x\to2}2f(x)+\lim_{x\to2}3g(x)}{\lim_{x\to2}4g(x)-\lim_{x\to2}3f(x)}$$
$$=\frac{2\times4+3\times2}{4\times2-3\times4}=\frac{14}{-4}=-\frac{7}{2}$$

05-2 답 (1) 2 (2) -5

해결전략 | 주어진 극한값을 이용할 수 있도록 값을 구해야 하는 식을 변형한다.

(1) 분모, 분자를 각각 x로 나누면

$$\lim_{x\to0}\frac{2x+4f(x)}{5x-2f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2+\frac{4f(x)}{x}}{5-\frac{2f(x)}{x}}=\frac{2+4}{5-2}=\frac{6}{3}=2$$

(2) 분모, 분자를 각각 x로 나누면

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2-5f(x)}{2x^2+f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{3x-\frac{5f(x)}{x}}{2x+\frac{f(x)}{x}}=\frac{0-5}{0+1}=-5$$

05-3 답 2

해결전략 | 주어진 극한값을 이용할 수 있도록 값을 구해야 하는 식을 변형한다.

STEP 1 식 변형하기

$$\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}=\frac{2\{2f(x)-3g(x)\}+7g(x)}{\frac{3}{2}\{2f(x)-3g(x)\}+\frac{7}{2}g(x)}$$
$$=\frac{\frac{2\{2f(x)-3g(x)\}}{g(x)}+7}{\frac{3\{2f(x)-3g(x)\}}{2g(x)}+\frac{7}{2}}$$

STEP 2 $\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}$의 값 구하기

이때 $\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-3g(x)\}=1$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{2\{2f(x)-3g(x)\}}{g(x)}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3\{2f(x)-3g(x)\}}{2g(x)}=0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\{2f(x)-3g(x)\}}{g(x)}+7}{\frac{3\{2f(x)-3g(x)\}}{2g(x)}+\frac{7}{2}}$$
$$=\frac{0+7}{0+\frac{7}{2}}=2$$

◉→ 다른 풀이

$h(x)=2f(x)-3g(x)$로 놓으면

$f(x)=\frac{h(x)+3g(x)}{2}$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\{h(x)+3g(x)\}+g(x)}{\frac{3}{2}\{h(x)+3g(x)\}-g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2h(x)+7g(x)}{\frac{3}{2}h(x)+\frac{7}{2}g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2h(x)}{g(x)}+7}{\frac{3h(x)}{2g(x)}+\frac{7}{2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{0+7}{0+\frac{7}{2}}=2$$

05-4 답 32

해결전략 | 먼저 주어진 극한값을 이용하여 $\lim_{x\to 4} f(x)$의 값을 구한다.

STEP 1 $\lim_{x\to 4} f(x)$의 값 구하기

$f(x)$에서 분모를 1로 생각하고 분모, 분자에 각각 $x-2$를 곱하면

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)f(x)}{x-2}=\frac{4}{2}=2$$

STEP 2 $\lim_{x\to 4}(x^2-2x)\{f(x)\}^2$의 구하기

$$\therefore \lim_{x\to 4}(x^2-2x)\{f(x)\}^2$$
$$=\lim_{x\to 4}(x^2-2x)\times\lim_{x\to 4}\{f(x)\}^2$$
$$=(16-8)\times 2^2=32$$

05-5 답 7

해결전략 | 주어진 극한값을 이용할 수 있도록 값을 구해야 하는 식을 변형한다.

STEP 1 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$의 값 구하기

$\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)}{x^2}=2$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{2}{3}$$

STEP 2 $\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+2x^2}{f(x)-2x+1}$의 값 구하기

주어진 식의 분모, 분자를 각각 x^2으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+2x^2}{f(x)-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4f(x)}{x^2}+2}{\frac{f(x)}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$$
$$=\frac{4\times\frac{2}{3}+2}{\frac{2}{3}-0+0}=\frac{\frac{14}{3}}{\frac{2}{3}}=7$$

05-6 답 5

해결전략 | 먼저 조건 (가), (나)를 이용하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구한 다음 이 값과 조건 (나)를 이용할 수 있도록 구해야 하는 식을 변형한다.

STEP 1 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값 구하기

$x\neq 0$, $g(x)\neq\frac{3}{2}$일 때, 조건 (가)에서

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{2\{g(x)+3\}}{2g(x)-3}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2g(x)+6}{2g(x)-3}=\frac{2\times 3+6}{2\times 3-3}$$
$$=\frac{12}{3}=4\ (\because \text{(나)})$$

STEP 2 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)+3x^2-2x}{f(x)-2x}$의 값 구하기

주어진 식의 분모, 분자를 각각 x로 나누면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)+3x^2-2x}{f(x)-2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}\times g(x)+3x-2}{\frac{f(x)}{x}-2}$$
$$=\frac{4\times 3+0-2}{4-2}=\frac{10}{2}=5$$

풍쌤의 비법

함수의 극한에 대한 성질은 극한값을 갖는 두 함수의 극한에 대하여 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 성립한다는 것을 의미하는 것이다.
극한값을 갖지 않고 발산하는 경우에는 식을 변형하여 극한값을 구할 수 있는 형태로 바꾼다.

필수유형 06 21쪽

06-1 답 (1) 5 (2) −9 (3) −2 (4) 2

해결전략 | 분모 또는 분자를 인수분해하여 공통인수로 약분한다.

(1) 분자를 인수분해하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^4-3x^3+5x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(2x^2-3x+5)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}(2x^2-3x+5)=5$$

(2) 분자를 인수분해하면

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-7x-8}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-8)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}(x-8)=-9$$

(3) 분모, 분자를 인수분해하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^3-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{x^2(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2}=-2$$

(4) 분모, 분자를 인수분해하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{x(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+2)}{x}$$
$$=2$$

06-2 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 4 (3) 18 (4) $\frac{1}{12}$

해결전략 | 분모 또는 분자를 유리화하여 공통인수로 약분한다.

(1) 분모, 분자에 각각 $\sqrt{x}+1$을 곱하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

(2) 분모, 분자에 각각 $\sqrt{x+3}+2$를 곱하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(\sqrt{x+3}+2)$$
$$=4$$

(3) 분모, 분자에 각각 $\sqrt{2x+3}+3$을 곱하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{\sqrt{2x+3}-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{2x+3}+3)}{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{2x+3}+3)}{2(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+3)(\sqrt{2x+3}+3)}{2}$$
$$=18$$

(4) 분모, 분자에 각각 $\sqrt{x+8}+3$을 곱하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+8}+3)}$$
$$=\frac{1}{12}$$

풍쌤의 비법

무리식이 포함된 식의 극한값을 구하는 방법

다음과 같이 무리식의 범위에서 인수분해를 통해 분모, 분자를 약분하여 극한값을 구할 수도 있다.

(1) $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

(2) $\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{\sqrt{x+3}-2}$
$=\sqrt{x+3}+2$

(3) $\frac{x^2-9}{\sqrt{2x+3}-3}$
$=\frac{1}{2}\times\frac{2(x-3)(x+3)}{\sqrt{2x+3}-3}$
$=\frac{1}{2}\times\frac{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)(x+3)}{\sqrt{2x+3}-3}$
$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2x+3}+3)(x+3)$

06-3 답 27

해결전략 | 분자는 인수분해하고 분모는 유리화하여 공통인수로 약분한다.

분모, 분자에 각각 $\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3}$을 곱하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3-3x^2}{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2(x-3)(\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3})}{(\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3})(\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3})}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2(x-3)(\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3})}{2(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2(\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3})}{2}=27$$

06-4 답 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

해결전략 | 분모, 분자를 각각 유리화하여 극한값을 구한다.

STEP 1 분모, 분자를 유리화하기

$\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}$에서 분모를 1로 생각하고 분모, 분자에 각각 $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}$를 곱하면

$$\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}$$
$$=\frac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x})(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}$$
$$=\frac{(2-x)-(2+x)}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}=\frac{-2x}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}$$

$\frac{1}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$의 분모, 분자에 각각 $\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}$를 곱하면

$$\frac{1}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$$
$$=\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x})(\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x})}$$
$$=\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{(3+x)-(3-x)}=\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{2x}$$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2x}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}\times\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{2x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x})}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}$$
$$=-\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

06-5 답 3

해결전략 | 극한값을 이용하여 a의 값을 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)=3a^2$$

즉, $3a^2=12$이므로 $a=-2$ ($\because a<0$)

STEP 2 $\lim_{x\to a}\frac{x^3-ax^2-4a^2x+4a^3}{x^2-a^2}$의 값 구하기

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-ax^2-4a^2x+4a^3}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2-4a^2)}{(x-a)(x+a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2-4a^2}{x+a}$$
$$=\frac{-3a^2}{2a}=-\frac{3}{2}a$$
$$=\left(-\frac{3}{2}\right)\times(-2)=3$$

06-6 답 2

해결전략 | 분모, 분자에서 약분되는 형태가 나오도록 인수분해 또는 유리화하여 극한값을 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$$\lim_{x\to a}\frac{3(x^2-a^2)}{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}\frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x+a)}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(x+\sqrt{ax}+a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{3(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x+a)}{x+\sqrt{ax}+a}$$
$$=\frac{12a\sqrt{a}}{3a}=4\sqrt{a}$$

즉, $4\sqrt{a}=8$이므로 $a=4$

STEP 2 $f(a)$의 값 구하기

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{(x^2-a^2)f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x-a)(x+a)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{x^2+4x+16}{(x+4)f(x)}$$
$$=\frac{4^2+4\times 4+16}{8\times f(4)}=\frac{6}{f(4)}$$

즉, $\frac{6}{f(4)}=3$이므로 $f(4)=2$

필수유형 07 23쪽

07-1 답 (1) 0 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 4 (4) 0

해결전략 | 분모, 분자를 분모의 최고차항으로 나눈다.

(1) 분모, 분자를 분모의 최고차항 x^2으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-4}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=0$$

(2) 분모, 분자를 각각 분모의 최고차항 x^2으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{2x^2+3x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

(3) 분모, 분자를 각각 분모의 최고차항 x^3으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x^2-2}{x^3-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=4$$

(4) 분모, 분자를 각각 분모의 최고차항 x^3으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2-3}{2x^3-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8}{x}-\frac{3}{x^3}}{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=0$$

풍쌤의 비법

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

① (분모의 차수)=(분자의 차수)

➡ 극한값은 $\frac{\text{(분자의 최고차항의 계수)}}{\text{(분모의 최고차항의 계수)}}$

② (분모의 차수)>(분자의 차수) ➡ 극한값은 0

③ (분모의 차수)<(분자의 차수) ➡ ∞ 또는 $-\infty$로 발산

위의 방법을 이용하여 풀면 (1), (4)의 경우 (분모의 차수)>(분자의 차수)이므로 극한값은 0이고, (2), (3)의 경우 (분모의 차수)=(분자의 차수)이므로 극한값은 각각 최고차항의 계수의 비인 $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{1}=4$이다.

07-2 답 (1) 1 (2) 3 (3) −2

해결전략 | 근호 안의 다항식을 고려하여 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

(1) 분모, 분자를 분모의 최고차항 x로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{4x^2-2}}{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{4-\frac{2}{x^2}}}{3-\frac{2}{x}}$$

$$=\frac{1+2}{3}=1$$

(2) 분모, 분자를 분모의 최고차항 x로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x-3}+5x}{\sqrt{9x^2+3}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+5}{\sqrt{9+\frac{3}{x^2}}-1}$$

$$=\frac{1+5}{3-1}=3$$

(3) $x=-t$라고 하면 $x\longrightarrow-\infty$일 때, $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2-1}+1}$$

이 식의 분모, 분자를 분모의 최고차항 t로 각각 나누면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2-1}+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}+\frac{1}{t}}$$

$$=-2$$

풍쌤의 비법

분모, 분자를 분모의 최고차항으로 나눌 때, 근호 안의 다항식은 $\sqrt{x^2}=x$로 고려하여 분모, 분자를 나눠 준다.

07-3 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

해결전략 | 분모, 분자를 분모의 최고차항으로 나눈다.

ㄱ. 분모, 분자를 분모의 최고차항 x^2으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=\infty\ (\text{발산})$$

ㄴ. 분모, 분자를 분모의 최고차항 x^2으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=0$$

ㄷ. 분모, 분자를 분모의 최고차항 x^3으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{x^3+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^3}}=2$$

ㄹ. $x=-t$라고 하면 $x\longrightarrow-\infty$일 때, $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x-4}{2x^2-x-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+3t-4}{2t^2+t-1}$$

이 식의 분모, 분자를 분모의 최고차항 t^2으로 각각 나누면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+3t-4}{2t^2+t-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{3}{t}-\frac{4}{t^2}}{2+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}=\frac{1}{2}$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

◉→ 다른 풀이

ㄱ. (분모의 차수)<(분자의 차수)이므로 발산한다.

ㄴ. (분모의 차수)>(분자의 차수)이므로 0으로 수렴한다.

ㄷ, ㄹ. (분모의 차수)=(분자의 차수)이므로 최고차항의 계수의 비로 수렴한다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

07-4 답 3

해결전략 | $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 구하고, $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값은 인수분해한 후 분모, 분자를 약분하여 극한값을 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$\frac{ax^2}{x^2-1}$의 분모, 분자를 분모의 최고차항 x^2으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1-\frac{1}{x^2}}=a$$

즉, $a=2$

STEP 2 b의 값 구하기

$$\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2}{x+1}=1$$

$\therefore b=1$

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

$\therefore a+b=2+1=3$

◉→ 다른 풀이

STEP 1 a의 값 구하기

$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2-1}=2$에서 (분모의 차수)=(분자의 차수)이므로

$\frac{a}{1}=2$ $\therefore a=2$

07-5 답 -1

해결전략 | $x=-t$로 치환하여 $t\longrightarrow\infty$ 형태로 바꾸어 극한값을 구한다.

STEP 1 $x=-t$로 치환하기

$x=-t$라고 하면 $x\longrightarrow-\infty$일 때, $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t-3}{\sqrt{t^2+2t}+\sqrt{t^2-2t}}$$

STEP 2 극한값 구하기

분모, 분자를 t로 각각 나누면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{-2t-3}{\sqrt{t^2+2t}+\sqrt{t^2-2t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2-\frac{3}{t}}{\sqrt{1+\frac{2}{t}}+\sqrt{1-\frac{2}{t}}}$$

$$=\frac{-2}{1+1}=-1$$

07-6 답 2

해결전략 | 주어진 식을 각 부분의 극한값이 존재하도록 변형한다.

STEP 1 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$의 값 구하기

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ (k는 상수)라고 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$$

STEP 2 극한값 구하기

주어진 식의 분모, 분자를 x^2으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-2f(x)}{3f(x)+x^2+x\sqrt{x^2+f(x)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{2f(x)}{x^2}}{\frac{3f(x)}{x^2}+1+\sqrt{1+\frac{f(x)}{x^2}}}$$

$$=\frac{4-0}{0+1+1}=2$$

필수유형 08 25쪽

08-1 답 (1) 발산(∞) (2) 2 (3) $\frac{3}{2}$ (4) 2

해결전략 | 주어진 식을 공통인수로 묶거나 유리화하여 극한값을 구한다.

(1) $\lim_{x\to\infty}(2x^2-3x-5)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)=\infty$

(2) 분모를 1로 생각하고 분모, 분자에 $\sqrt{x^2+4x}+x$를 각각 곱하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=2$$

(3) 분모를 1로 생각하고 분모, 분자에 $x+\sqrt{x^2-3x}$를 각각 곱하면

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-3x})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-3x})(x+\sqrt{x^2-3x})}{x+\sqrt{x^2-3x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x+\sqrt{x^2-3x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=\frac{3}{2}$$

(4) 분모를 1로 생각하고 분모, 분자에 $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}$를 각각 곱하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=2$$

08-2 답 (1) $-\frac{1}{4}$ (2) -1 (3) 2 (4) 1

해결전략 | 통분하여 분모, 분자의 공통인수로 약분한 후 극한값을 구하고, 근호가 있는 식은 유리화하여 극한값을 구한다.

(1) 괄호 안의 식을 통분하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{2-(x+2)}{2(x+2)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2(x+2)}=-\frac{1}{4}$$

(2) 괄호 안의 식을 통분하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{4}{(x-2)^2}\right\}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-4}{(x-2)^2}=-1$$

(3) 괄호 안의 식을 통분하면

$$\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(x\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-4})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-4})(\sqrt{x}+\sqrt{x-4})}{\sqrt{x}+\sqrt{x-4}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-4}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}}=2$$

(4) 괄호 안의 식을 통분하면

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(x^2\times\frac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(\sqrt{x^2+2}-x)(\sqrt{x^2+2}+x)}{\sqrt{x^2+2}(\sqrt{x^2+2}+x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+2+x\sqrt{x^2+2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{x^2}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=1$$

08-3 답 -1

해결전략 | $x\longrightarrow-\infty$일 때는 $x=-t$로 치환하여 극한값을 구한다.

STEP 1 $x=-t$로 치환하기

$x=-t$라고 하면 $x\longrightarrow-\infty$일 때, $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x+1}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-2t+1}-t)$$

STEP 2 극한값 구하기

분모를 1로 생각하고 분모, 분자에 $\sqrt{t^2-2t+1}+t$를 각각 곱하면

$$\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-2t+1}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-2t+1}-t)(\sqrt{t^2-2t+1}+t)}{\sqrt{t^2-2t+1}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t+1}{\sqrt{t^2-2t+1}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}=-1$$

08-4 답 $A<C<B$

해결전략 | $x\longrightarrow-\infty$일 때 $x=-t$로 치환하여 극한값을 구한다.

STEP 1 A의 값 구하기

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{(\sqrt{x^2-2x}-x)(\sqrt{x^2-2x}+x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{-2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}{-2}=-1$$

STEP 2 B의 값 구하기

$x=-t$라고 하면 $x\longrightarrow-\infty$일 때, $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-5x+3}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+5t+3}-t)$$

이 식의 분모를 1로 생각하고 분모, 분자에 $\sqrt{t^2+5t+3}+t$를 각각 곱하면

$$B=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+5t+3}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+5t+3}-t)(\sqrt{t^2+5t+3}+t)}{\sqrt{t^2+5t+3}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{5t+3}{\sqrt{t^2+5t+3}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{5+\frac{3}{t}}{\sqrt{1+\frac{5}{t}+\frac{3}{t^2}}+1}=\frac{5}{2}$$

STEP 3 C의 값 구하기

$$C=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{(x+1)^2}=2$$

STEP 4 A, B, C의 대소 관계 나타내기

따라서 $A=-1$, $B=\frac{5}{2}$, $C=2$이므로

$A<C<B$

08-5 답 16

해결전략 | 함수에 주어진 식 또는 값을 대입하여 식을 정리한다.

STEP 1 $f\left(\frac{2}{x}+2\right)-f(2)$ 구하기

$$f\left(\frac{2}{x}+2\right)-f(2)=\left(\frac{2}{x}+2\right)^2-2\left(\frac{2}{x}+2\right)+3-3$$
$$=\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x}$$

STEP 2 $\lim_{x\to\infty} x^2\left\{f\left(\frac{2}{x}+2\right)-f(2)\right\}$의 값 구하기

$$\therefore \lim_{x\to\infty} x^2\left\{f\left(\frac{2}{x}+2\right)-f(2)\right\}^2$$
$$=\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x}\right)^2$$
$$=\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{16}{x^4}+\frac{32}{x^3}+\frac{16}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{16}{x^2}+\frac{32}{x}+16\right)=16$$

◉→ 다른 풀이

$\frac{2}{x}=t$라고 하면 $x\to\infty$일 때, $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left\{f\left(\frac{2}{x}+2\right)-f(2)\right\}^2$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{2}{t}\right)^2\{f(t+2)-f(2)\}^2$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{4\{(t+2)^2-2(t+2)+3-3\}^2}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{4(t^2+2t)^2}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to 0}\{4(t+2)^2\}=16$$

08-6 답 9

해결전략 | 함수에 주어진 식을 대입하여 식을 유리화한다.

STEP 1 $f(-x)$ 구하기

$f(x)=a(x-1)^2+1=ax^2-2ax+a+1$이므로

$f(-x)=ax^2+2ax+a+1$

STEP 2 $\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{f(-x)}-\sqrt{f(x)}\}$의 값을 a로 나타내기

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\{\sqrt{f(-x)}-\sqrt{f(x)}\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+2ax+a+1}-\sqrt{ax^2-2ax+a+1})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4ax}{\sqrt{ax^2+2ax+a+1}+\sqrt{ax^2-2ax+a+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4a}{\sqrt{a+\frac{2a}{x}+\frac{a+1}{x^2}}+\sqrt{a-\frac{2a}{x}+\frac{a+1}{x^2}}}$$
$$=2\sqrt{a}$$

STEP 3 a의 값 구하기

즉, $2\sqrt{a}=6$이므로 $\sqrt{a}=3$

$\therefore a=9$

필수유형 09 27쪽

09-1 답 (1) 0 (2) -2 (3) $a=2, b=-3$ (4) $a=-6, b=5$

해결전략 | 분모의 극한값이 0이고 극한값이 존재하므로 분자의 극한값도 0이다.

(1) $x\to 0$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}(2x+a)=0$이므로 $a=0$

(2) $x\to -2$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -2}(x^2+ax-8)=0$이므로 $4-2a-8=0$

$\therefore a=-2$

(3) STEP 1 a, b의 관계식 구하기

$x\to 1$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore a=-b-1$

STEP 2 a, b의 값 구하기

$a=-b-1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+(-b-1)x+b}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x-b)$$
$$=1-b=4$$

따라서 $b=-3$이므로 $a=-(-3)-1=2$

(4) STEP 1 a의 값 구하기

$x\to 2$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(x^2+x+a)=0$이므로 $6+a=0$

$\therefore a=-6$

STEP 2 b의 값 구하기

$a=-6$을 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+a}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$$

09-2 답 (1) $a=4, b=4\sqrt{2}$ (2) $a=2, b=2$
(3) $a=5, b=3$ (4) $a=1, b=3$

해결전략 | 분모의 극한값이 0이고 극한값이 존재하므로 분자의 극한값도 0이다.

(1) **STEP 1** a, b의 관계식 구하기

$x\longrightarrow 1$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}(a\sqrt{x+1}-b)=0$이므로 $a\sqrt{2}-b=0$

$\therefore b=a\sqrt{2}$

STEP 2 a, b의 값 구하기

$b=a\sqrt{2}$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+1}-a\sqrt{2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{a}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{a}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$\therefore a=4, b=4\sqrt{2}$

(2) **STEP 1** a, b의 관계식 구하기

$x\longrightarrow 2$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+a}-b)=0$이므로 $\sqrt{2+a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{2+a}$

STEP 2 a, b의 값 구하기

$b=\sqrt{2+a}$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2+a}}=\frac{1}{4}$$

$\therefore a=2, b=2$

(3) **STEP 1** a, b의 관계식 구하기

$x\longrightarrow 4$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 4}(\sqrt{x+a}-b)=0$이므로

$\sqrt{4+a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{4+a}$

STEP 2 a, b의 값 구하기

$b=\sqrt{4+a}$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+a}-b}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{4+a}}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{4+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{4+a})(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{4+a})(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x+a}+\sqrt{4+a})}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+a}+\sqrt{4+a}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4+a}}=\frac{2}{3}$$

$\therefore a=5, b=3$

(4) **STEP 1** a, b의 관계식 구하기

$x\longrightarrow 2$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x^2+a}-b)=0$이므로

$\sqrt{8+a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{8+a}$

STEP 2 a, b의 값 구하기

$b=\sqrt{8+a}$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+a}-b}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+a}-\sqrt{8+a}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2x^2+a}-\sqrt{8+a})(\sqrt{2x^2+a}+\sqrt{8+a})}{(x-2)(\sqrt{2x^2+a}+\sqrt{8+a})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{(x-2)(\sqrt{2x^2+a}+\sqrt{8+a})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{2x^2+a}+\sqrt{8+a})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x+2)}{\sqrt{2x^2+a}+\sqrt{8+a}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{8+a}}=\frac{4}{3}$$

$\therefore a=1, b=3$

09-3 답 14

해결전략 | 무리식을 유리식으로 만들기 위하여 분모, 분자에 적절한 무리식을 곱한다.

STEP 1 a, b의 관계식 구하기

$x \longrightarrow -2$일 때, (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -2} (\sqrt{x+a}-b)=0$이므로 $\sqrt{a-2}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{a-2}$

STEP 2 a, b의 값 구하기

$b=\sqrt{a-2}$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a}-b}=\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-2}}$$
$$=\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}{x+2}$$
$$=\lim_{x \to -2} (\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})$$
$$=2\sqrt{a-2}=6$$

$\therefore a=11$, $b=3$

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

$\therefore a+b=11+3=14$

09-4 답 80

해결전략 | 극한값에 맞추어 a, b, c의 값을 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2-bx+4}{2x-1}=2$에서 $x \longrightarrow \infty$일 때, 0이 아닌 극한값을 가지므로 (분모의 차수)=(분자의 차수)이어야 한다.

$\therefore a=0$

STEP 2 b의 값 구하기

따라서 $\lim_{x \to \infty} \frac{-bx+4}{2x-1}=2$이고 극한값은 최고차항의 계수의 비와 같으므로

$\frac{-b}{2}=2 \qquad \therefore b=-4$

STEP 3 c의 값 구하기

$$\lim_{x \to 2} \frac{c(x-2)}{x^2-4}=\lim_{x \to 2} \frac{c(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x \to 2} \frac{c}{x+2}$$
$$=\frac{c}{4}=2$$

이므로 $c=8$

STEP 4 $a^2+b^2+c^2$의 값 구하기

$\therefore a^2+b^2+c^2=0^2+(-4)^2+8^2=80$

09-5 답 20

해결전략 | 분모의 극한값이 0이고 극한값이 존재하면 분자의 극한값도 0이다.

STEP 1 a의 값 구하기

$x \longrightarrow 2$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 2} (\sqrt{3x-a}-\sqrt{x+2})=0$이므로

$\sqrt{6-a}-2=0 \qquad \therefore a=2$

STEP 2 b의 값 구하기

$a=2$를 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3}}$$
$$=\lim_{x \to 2} \frac{(2x-4)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3})}{(x-2)(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2})}$$
$$=\lim_{x \to 2} \frac{2(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3})}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}$$
$$=\frac{2 \times 2\sqrt{5}}{4}=\sqrt{5}$$

STEP 3 a^2b^2의 값 구하기

$\therefore a^2b^2=2^2 \times (\sqrt{5})^2=20$

09-6 답 12

해결전략 | 분모의 극한값이 0이고 극한값이 존재하면 분자를 인수분해하여 미지수를 결정한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2+bx+c}{x^2+x-2}=3$이므로 분모, 분자를 분모의 최고차항 x^2으로 각각 나누면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=a=3$$

STEP 2 c의 값 구하기

$f(x)=3x^2+bx+c$로 놓으면 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2+x-2}=3$에서 $x \longrightarrow 1$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore f(x)=(x-1)(3x-c)$

$f(x)=(x-1)(3x-c)$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(3x-c)}{x^2+x-2}=\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(3x-c)}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\lim_{x \to 1} \frac{3x-c}{x+2}=\frac{3-c}{3}=3$$

$\therefore c=-6$

STEP 3 b의 값 구하기

$c=-6$을 $f(x)$에 대입하면

$f(x)=(x-1)(3x+6)=3x^2+3x-6$이므로

$b=3$

STEP 4 $4a+2b+c$의 값 구하기

$\therefore 4a+2b+c=12+6+(-6)=12$

필수유형 10 29쪽

10-1 답 -6

해결전략 | 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=6$에서 $x\longrightarrow 3$일 때, (분모)$\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow 0$이다.

즉, $f(3)=0$이므로 $f(x)=(x-3)(x+k)$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+k)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}(x+k)=3+k$$

즉, $3+k=6$이므로 $k=3$

$\therefore f(x)=(x-3)(x+3)$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore \lim_{x\to -3}\frac{f(x)}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to -3}(x-3)=-6$$

10-2 답 14

해결전략 | 조건 (가)에서 $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구하고, 조건 (나)에서 $f(x)$의 인수를 구하여 $f(x)$의 식을 추론한다.

STEP 1 $f(x)$의 최고차항의 계수 구하기

(가)에서 $x\longrightarrow\infty$일 때, 0이 아닌 극한값을 가지므로

(분모의 차수)=(분자의 차수)이다.

또, 극한값이 2이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차식이다.

STEP 2 $f(x)$ 구하기

(나)에서 $x\longrightarrow 0$일 때, (분모)$\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$f(x)=x(2x+k)$ (k는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2x+k)}{x}=\lim_{x\to 0}(2x+k)=k$$

따라서 $k=3$이므로

$f(x)=x(2x+3)$

STEP 3 $f(2)$의 값 구하기

$\therefore f(2)=2\times 7=14$

> **풍쌤의 비법**
>
> **다항함수의 결정**
>
> 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
>
> (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$ (k는 0이 아닌 실수)이면
>
> ➡ $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같고 최고차항의 계수의 비는 k이다.
>
> (2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=s$ (s는 실수)이고 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이면
>
> ➡ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)=0$

10-3 답 100

해결전략 | 주어진 조건을 만족시키기 위한 $f(x)$의 조건을 구한다.

STEP 1 $f(a)=0$임을 알기

$\lim\limits_{x\to a}(2x-2a)=0$이므로 $f(a)\neq 0$이면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(2x-2a)}{f(x)+(2x-2a)}=\frac{f(a)}{f(a)}=1\neq\frac{2}{3}$$

이므로 $f(a)=0$

이때 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이고 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

STEP 2 경우에 따른 $\alpha-\beta$의 값 구하기

(i) $a=\alpha$일 때

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(2x-2a)}{f(x)+(2x-2a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)-2(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)+2(x-\alpha)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-\alpha)(x-\beta-2)}{(x-\alpha)(x-\beta+2)}$$
$$=\frac{\alpha-\beta-2}{\alpha-\beta+2}=\frac{2}{3}$$

즉, $3(\alpha-\beta-2)=2(\alpha-\beta+2)$이므로

$\alpha-\beta=10$

(ii) $a=\beta$일 때

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(2x-2a)}{f(x)+(2x-2a)}$$

$$=\lim_{x\to\beta}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)-2(x-\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)+2(x-\beta)}$$

$$=\lim_{x\to\beta}\frac{(x-\beta)(x-\alpha-2)}{(x-\beta)(x-\alpha+2)}$$

$$=\frac{\beta-\alpha-2}{\beta-\alpha+2}=\frac{2}{3}$$

즉, $3(\beta-\alpha-2)=2(\beta-\alpha+2)$이므로

$\alpha-\beta=-10$

STEP 3 $(\alpha-\beta)^2$의 값 구하기

(i), (ii)에 의하여 $(\alpha-\beta)^2=100$

10-4 답 −2

해결전략 I $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ (k는 실수)일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$임을 이용하여 $f(x)$의 인수를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구성하기

$x\longrightarrow 1$, $x\longrightarrow 2$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

따라서 $f(x)$는 $x-1$, $x-2$를 인수로 갖는 삼차함수이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

STEP 2 a, b의 값 구하기

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x-2)(ax+b)$$
$$=-(a+b)$$

이므로 $-(a+b)=-2$

$\therefore a+b=2$ …… ㉠

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x-1)(ax+b)$$
$$=2a+b$$

이므로 $2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=3$

STEP 3 극한값 구하기

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(-x+3)$이므로

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-1)(x-2)(x-3)}{x-3}$$
$$=-\lim_{x\to 3}(x-1)(x-2)$$
$$=-2\times 1=-2$$

10-5 답 0

해결전략 I $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한식에서 분자의 차수와 최고차항의 계수를 구해 $f(x)$의 식을 미지수를 사용해 세우고, $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한식에 대입하여 미지수를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구성하기

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2+3x}=2$에서 0이 아닌 극한값이 존재하므로 분자는 최고차항의 계수가 2인 이차식이다.

$f(x)-x^3=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^3+2x^2+ax+b$

STEP 2 a, b의 값 구하기

또, $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}=3$에서 $x\longrightarrow -2$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

따라서 $f(-2)=-8+8-2a+b=0$이므로

$b=2a$

$$\therefore \lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2+ax+2a}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+a)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2}(x^2+a)$$
$$=4+a$$

즉, $4+a=3$이므로

$a=-1$, $b=-2$

STEP 3 $f(-1)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-x-2$이므로

$f(-1)=-1+2+1-2=0$

10-6 답 12

해결전략 I $x\longrightarrow 1$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow 0$임을 이용하여 $f(x)$, $f(x)-(ax+b)$의 인수를 구하고 $f(x)$의 식을 추론한다.

STEP 1 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=3$을 이용하여 $f(x)$의 조건 찾기

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=3$에서 $x\longrightarrow 1$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $f(1)=0$이므로

$f(x)=(x-1)g(x)$ ($g(x)$는 다항함수) …… ㉠

로 놓으면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)g(x)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x+1}=\frac{g(1)}{2}$$

즉, $\frac{g(1)}{2}=3$이므로 $g(1)=6$

STEP 2 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-(ax+b)}{(x-1)^2}$의 극한값이 존재함을 이용하여 $f(x)$의 조건 찾기

또, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-(ax+b)}{(x-1)^2}$의 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow 1$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, 분자는 $(x-1)^2$을 인수로 가져야 하므로

$f(x)-(ax+b)=(x-1)^2h(x)$

로 놓으면 $f(x)=(x-1)^2h(x)+(ax+b)$

이때 $f(1)=0$이므로 $a+b=0$

$\therefore b=-a$

$\therefore f(x)=(x-1)^2h(x)+a(x-1)$

$=(x-1)\{(x-1)h(x)+a\}$ ····· ㉡

STEP 3 a, b의 값 구하기

㉠, ㉡에서 $g(x)=(x-1)h(x)+a$

이때 $g(1)=6$이므로 $a=6$, $b=-6$

STEP 4 $a-b$의 값 구하기

$\therefore a-b=6-(-6)=12$

필수유형 11 31쪽

11-1 답 2

해결전략 | 각 변에 극한을 취하여 $f(x)$의 극한값을 구한다.

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to -3}(-x^2-4x-1)\le\lim_{x\to -3}f(x)\le\lim_{x\to -3}(2x+8)$

이때 $\lim_{x\to -3}(-x^2-4x-1)=2$, $\lim_{x\to -3}(2x+8)=2$이므로

$\lim_{x\to -3}f(x)=2$

11-2 답 $\frac{1}{2}$

해결전략 | 각 변에 극한을 취하여 $f(x)$의 극한값을 구한다.

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2}{2x^2+1}\le\lim_{x\to\infty}f(x)\le\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{2x^2+1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$

11-3 답 1

해결전략 | 주어진 부등식을 변형한 후 각 변에 극한을 취하여 주어진 식의 극한값을 구한다.

STEP 1 주어진 부등식 변형하기

$x+1<f(x)<x+2$의 각 변을 제곱하면

$(x+1)^2<\{f(x)\}^2<(x+2)^2$

$x^2+2>0$이므로 각 변을 x^2+2로 나누면

$\frac{(x+1)^2}{x^2+2}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+2}<\frac{(x+2)^2}{x^2+2}$

STEP 2 $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+2}$의 값 구하기

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+2}=1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{x^2+2}=1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+2}=1$

11-4 답 3

해결전략 | $f(x)$에 대한 부등식으로 변형하여 극한값을 구한다.

STEP 1 $f(x)$에 대한 부등식으로 변형하기

$x^2+2>0$이므로 $3x^2-1\le(x^2+2)f(x)\le 3x^2+2$의 각 변을 x^2+2로 나누면

$\frac{3x^2-1}{x^2+2}\le f(x)\le\frac{3x^2+2}{x^2+2}$

STEP 2 $\lim_{x\to\infty}f(x)$의 값 구하기

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x^2+2}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{x^2+2}=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=3$

11-5 답 10

해결전략 | 주어진 조건으로부터 $f(x)$의 차수과 최고차항의 계수, 인수를 구하여 $f(x)$를 나타낸다.

STEP 1 $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수 구하기

$x^2>0$이므로 ㈎에서 각 변을 x^2으로 나누면

$\frac{2x^2-5x}{x^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{2x^2+2}{x^2}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x}{x^2}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2}{x^2}=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$

따라서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

STEP 2 $f(x)$ 구하기

(나)에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0$이므로

$f(x) = 2(x-1)(x+a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2+2x-3} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)(x+a)}{(x-1)(x+3)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2(x+a)}{x+3}$$

$$= \frac{2(1+a)}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

STEP 3 $f(3)$의 값 구하기

따라서 $f(x) = 2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$이므로

$f(3) = 2 \times 2 \times \frac{5}{2} = 10$

11-6 답 2

해결전략 | 양 끝의 함수의 극한값을 구하여 $\lim_{x \to \infty} f(x)$의 값을 구한다.

STEP 1 $\lim_{x \to \infty} g\left(1+\frac{x}{1+x}\right)$의 값 구하기

$1+\frac{x}{1+x} = 1+\frac{(1+x)-1}{1+x} = 2-\frac{1}{1+x}$

$2-\frac{1}{1+x} = t$라고 하면 $x \longrightarrow \infty$일 때, $t \longrightarrow 2-$이므로

$\lim_{x \to \infty} g\left(1+\frac{x}{1+x}\right) = \lim_{t \to 2-} g(t) = 2$

STEP 2 $\lim_{x \to \infty} g\left(2+\frac{1}{1+x}\right)$의 값 구하기

$2+\frac{1}{1+x} = s$라고 하면 $x \longrightarrow \infty$일 때, $s \longrightarrow 2+$이므로

$\lim_{x \to \infty} g\left(2+\frac{1}{1+x}\right) = \lim_{s \to 2+} g(t) = 2$

STEP 3 $\lim_{x \to \infty} f(x)$의 값 구하기

따라서 $g\left(1+\frac{x}{1+x}\right) < f(x) < g\left(2+\frac{1}{1+x}\right)$에서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x \to \infty} g\left(1+\frac{1}{1+x}\right) \le \lim_{x \to \infty} f(x) \le \lim_{x \to \infty} g\left(2+\frac{1}{1+x}\right)$

즉, $2 \le \lim_{x \to \infty} f(x) \le 2$

$\therefore \lim_{x \to \infty} f(x) = 2$

발전유형 12 33쪽

12-1 답 $\frac{1}{2}$

해결전략 | $\overline{PQ}$, $\overline{AQ}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타내어 극한값을 구한다.

STEP 1 $\overline{PQ}$, $\overline{AQ}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타내기

점 P의 좌표는 $P(x, \sqrt{3x-3})$, 점 Q의 좌표는 $Q(x, 3)$이므로

$\overline{PQ} = \sqrt{3x-3}-3$, $\overline{AQ} = x-4$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore \lim_{x \to 4+} \frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} = \lim_{x \to 4+} \frac{\sqrt{3x-3}-3}{x-4}$$

$$= \lim_{x \to 4+} \frac{(\sqrt{3x-3}-3)(\sqrt{3x-3}+3)}{(x-4)(\sqrt{3x-3}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 4+} \frac{3x-12}{(x-4)(\sqrt{3x-3}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 4+} \frac{3}{\sqrt{3x-3}+3} = \frac{1}{2}$$

풍쌤의 비법

함수의 극한의 활용 문제는 주어진 조건들은 사용하여 한 문자에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 식에 대입하여 극한값을 구하는 문제가 대부분이다.

주어진 조건을 변형하여 한 문자에 대한 식으로 나타내는 방법이 핵심이다.

12-2 답 2

해결전략 | $\overline{AH}$, $\overline{BH}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타내어 극한값을 구한다.

STEP 1 점 A, B, C의 좌표를 t에 대한 식으로 나타내기

점 A의 좌표는 $A(1, 2+\sqrt{3})$

점 B의 좌표는 $B\left(t, \frac{2}{t}+\sqrt{3}\right)$

점 H의 좌표는 $H\left(1, \frac{2}{t}+\sqrt{3}\right)$

STEP 2 극한값 구하기

따라서 $\overline{AH} = 2-\frac{2}{t}$, $\overline{BH} = t-1$이므로

$$\lim_{t \to 1} \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \lim_{t \to 1} \frac{2-\frac{2}{t}}{t-1}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{2(t-1)}{t(t-1)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{2}{t} = 2$$

12-3 답 $\frac{4}{5}$

해결전략 | 점과 직선 사이의 거리와 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{OH}$의 길이를 구한다.

STEP 1 $\overline{OP}$, $\overline{OH}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타내기

점 P의 좌표는 $P(t, \sqrt{t})$이므로 $\overline{OP}^2=t^2+t$

$\overline{PH}$의 길이는 점 P와 직선 $y=\frac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{PH}=\frac{|t-2\sqrt{t}|}{\sqrt{5}}$$

삼각형 PHO는 직각삼각형이므로

$$\overline{OH}^2=\overline{OP}^2-\overline{PH}^2$$

$$=(t^2+t)-\frac{(t-2\sqrt{t})^2}{5}=\frac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5}$$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{OH}^2}{\overline{OP}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5(t^2+t)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t}}{5+\frac{5}{t}}=\frac{4}{5}$$

풍쌤의 비법

점과 직선 사이의 거리

점 $P(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

12-4 답 1

해결전략 | $\frac{a^2}{r^2}$을 r에 대한 식으로 변형하여 극한값을 구한다.

STEP 1 a와 r 사이의 관계식 구하기

두 점 $(0, 4)$, $(a, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{4}=1$, 즉 $4x+ay-4a=0$

직선 $4x+ay-4a=0$과 원의 중심인 점 $(0, r)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로

$$\frac{|ar-4a|}{\sqrt{16+a^2}}=r,\ a^2(r-4)^2=r^2(16+a^2)$$

$$a^2r^2-8a^2r+16a^2=16r^2+a^2r^2$$

$$a^2(2-r)=2r^2$$

$$\therefore \frac{a^2}{r^2}=\frac{2}{2-r}$$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore \lim_{r\to0+}\frac{a^2}{r^2}=\lim_{r\to0+}\frac{2}{2-r}=1$$

풍쌤의 비법

x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식

x절편이 a이고, y절편이 b인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ (단, } a\neq0,\ b\neq0)$$

12-5 답 $\frac{5}{2}$

해결전략 | $S(x)$를 x에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 $S(x)$ 구하기

점 A의 좌표는 $A(x, -2x+5)$이므로

$P(x, 0)$, $Q(0, -2x+5)$

따라서 $\overline{OP}=x$, $\overline{OQ}=-2x+5$이므로

$$S(x)=\frac{1}{2}x(-2x+5)\left(\text{단, } 0<x<\frac{5}{2}\right)$$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{S(x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{2}x(-2x+5)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{1}{2}(-2x+5)=\frac{5}{2}$$

12-6 답 3

해결전략 | 각 점의 좌표를 이용하여 $\overline{OQ}$, $\overline{PQ}$의 길이를 m에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 $\overline{OQ}$, $\overline{PQ}$의 길이를 m에 대한 식으로 나타내기

$y=x^2$의 그래프와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는

$x^2=mx$에서

$x(x-m)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=m$

따라서 점 P의 좌표를 $P(m, m^2)$이므로

$$P'(m, 0),\ Q'\left(\frac{m}{2}, 0\right)$$

즉, $Q\left(\frac{m}{2}, \frac{m^2}{4}\right)$이므로

$$\overline{OQ}=\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{m^2}{4}\right)^2}$$

$$\overline{PQ}=\sqrt{\left(m-\frac{m}{2}\right)^2+\left(m^2-\frac{m^2}{4}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{3m^2}{4}\right)^2}$$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore \lim_{m\to\infty}\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}m^2\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{m^2}{4}\right)^2}}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{m^2}{4}+\frac{9}{16}m^2}}{\sqrt{\frac{m^2}{4}+\frac{m^4}{16}}}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{4m^2}+\frac{9}{16}}}{\sqrt{\frac{1}{4m^2}+\frac{1}{16}}}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$$

유형 특강 35쪽

1 답 (1) 참 (2) 참 (3) 거짓

해결전략 | 참인 조건은 연산을 이용하여 극한값을 찾고, 거짓인 조건은 반례를 찾아본다.

(1) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)라 하고 두 식을 더하면

$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}+\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$

$=\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)\}$

$=2\lim_{x\to a}f(x)=\alpha+\beta$

$\therefore \lim_{x\to a}f(x)=\frac{\alpha+\beta}{2}$

따라서 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재한다. (참)

(2) $\frac{f(x)}{x}=g(x)$라고 하면 $\lim_{x\to 0}g(x)=k$이고

$f(x)=xg(x)$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}xg(x)=\lim_{x\to 0}x\times\lim_{x\to 0}g(x)$

$=0\times k=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}f(x)=0$ (참)

(3) [반례] $f(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $g(x)=1+\frac{1}{x^2}$이면

$1-\frac{1}{x^2}<1+\frac{1}{x^2}$이므로 $f(x)<g(x)$

그런데 $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)$이다. (거짓)

실전 연습 문제 36~38쪽

01 ③	02 4	03 −1	04 ③	05 ⑤
06 4	07 ④	08 8	09 ②	10 5
11 20	12 36	13 66	14 2	15 ①
16 29	17 1			

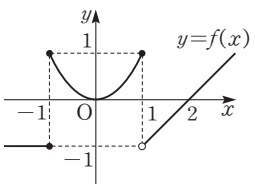
01

해결전략 | 그래프를 따라 함숫값이 가까워지는 값을 찾는다.

STEP 1 $\lim_{x\to -1-}f(x)$의 값 구하기

그래프에서 $x\longrightarrow -1-$일 때, $f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to -1-}f(x)=-1$



STEP 2 $\lim_{x\to 1-}f(x)$의 값 구하기

$x\longrightarrow 1-$일 때, $f(x)\longrightarrow 1$이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=1$

STEP 3 $\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)$의 값 구하기

$\therefore \lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=-1+1=0$

02

해결전략 | 극한값이 존재하므로 좌극한과 우극한이 같음을 이용한다.

STEP 1 $\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}+\lim_{x\to 0+}\{f(x)-g(x)\}$의 값 구하기

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}+\lim_{x\to 0+}\{f(x)-g(x)\}$

$=\lim_{x\to 0-}(x^2-2x+4)+\lim_{x\to 0+}(x^2+6)$

$=4+6=10$ ····· ❶

이때 $\lim_{x\to 0}f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0}f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}+\lim_{x\to 0+}\{f(x)-g(x)\}$

$=\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 0-}g(x)+\lim_{x\to 0+}f(x)-\lim_{x\to 0+}g(x)$

$=2\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 0-}g(x)-\lim_{x\to 0+}g(x)$

$=2\lim_{x\to 0}f(x)+2$ ····· ❷

STEP 2 $\lim_{x\to 0}f(x)$의 값 구하기

따라서 $2\lim_{x\to 0}f(x)+2=10$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=4$ ····· ❸

채점 요소	배점
❶ $\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}+\lim_{x\to0+}\{f(x)-g(x)\}$의 값 구하기	40 %
❷ $\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}+\lim_{x\to0+}\{f(x)-g(x)\}$의 값을 $\lim_{x\to0}\{f(x)\}$를 사용하여 나타내기	40 %
❸ $\lim_{x\to0}\{f(x)\}$의 값 구하기	20 %

03

해결전략 | $x=-1$, $x=1$에서 극한값이 존재하는지 조사해 본다.

STEP 1 $x=-1$에서의 극한 조사하기

$f(x)=\begin{cases}1-x & (x\le-1,\ x\ge1)\\ 1-x^2 & (-1<x<1)\end{cases}$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(1-x)=2$

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(1-x^2)=0$

즉, $\lim_{x\to-1-}f(x)\ne\lim_{x\to-1+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

STEP 2 $x=1$에서의 극한 조사하기

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(1-x^2)=0$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(1-x)=0$

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재한다.

$\therefore a=-1$

04

해결전략 | $f(g(t))$ 꼴을 $f(x)$ 꼴로 변형시켜 극한값을 구한다.

STEP 1 $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$의 값 구하기

$\frac{t-1}{t+1}=m$이라고 하면 $\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$이므로 $t\longrightarrow\infty$일 때, $m\longrightarrow1-$이다.

$\therefore\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{m\to1-}f(m)=2$

STEP 2 $\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값 구하기

$\frac{4t-1}{t+1}=n$이라고 하면 $\frac{4t-1}{t+1}=4-\frac{5}{t+1}$이므로 $t\longrightarrow-\infty$일 때, $n\longrightarrow4+$이다.

$\therefore\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{n\to4+}f(n)=3$

STEP 3 $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값 구하기

$\therefore\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=2+3=5$

05

해결전략 | 좌극한과 우극한을 비교한다.

ㄱ. $\lim_{x\to2-}\{f(x)-g(x)\}=0-3=-3$,

$\lim_{x\to2+}\{f(x)-g(x)\}=0-(-3)=3$이므로

$\lim_{x\to2-}\{f(x)-g(x)\}\ne\lim_{x\to2+}\{f(x)-g(x)\}$

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-g(x)\}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $-x=t$라고 하면 $x\longrightarrow2$일 때, $t\longrightarrow-2$이므로

$\lim_{x\to2}\{f(x)+g(-x)\}=\lim_{x\to2}f(x)+\lim_{t\to-2}g(t)$

$=0+3=3$

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)+g(-x)\}$의 값이 존재한다.

ㄷ. $\lim_{x\to2}\{f(x)\}^2=0$이고

$\lim_{x\to2-}\{g(x)\}^2=3^2=9$, $\lim_{x\to2+}\{g(x)\}^2=(-3)^2=9$

이므로 $\lim_{x\to2}\{g(x)\}^2$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to2}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]$의 값은 존재한다.

ㄹ. $\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=0\times3=0$,

$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=0\times(-3)=0$

이므로 $\lim_{x\to2}f(x)g(x)=0$

즉, $\lim_{x\to2}f(x)g(x)$의 값이 존재한다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

06

해결전략 | 주어진 극한값을 이용할 수 있도록 구해야 하는 식을 변형하고 함수의 극한에 대한 성질을 이용한다.

STEP 1 식 변형하기

$\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}$이므로

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)$

STEP 2 극한값 구하기

$\therefore\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to1}(x+1)$

$=2\times2=4$

07

해결전략 I $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 구하고, $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값은 인수분해한 후 분모, 분자를 약분하여 극한값을 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$\frac{ax^2+1}{x^2+1}$의 분모, 분자를 분모의 최고차항 x^2으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=a$$

즉, $a=3$

STEP 2 b의 값 구하기

$$\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3}{x+2}=\frac{3}{4}$$

$\therefore b=\frac{3}{4}$

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

$\therefore a+b=\frac{15}{4}$

08

해결전략 I 인수분해와 유리화를 이용하여 주어진 식에서 미지수의 값을 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x-a)(x+a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}=\frac{3a^2}{2a}$$

$$=\frac{3}{2}a=9$$

이므로 $a=6$ ····· ❶

STEP 2 b의 값 구하기

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2bx}-\sqrt{x^2-2ax})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x(a-b)}{\sqrt{x^2-2bx}+\sqrt{x^2-2ax}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(a-b)}{\sqrt{1-\frac{2b}{x}}+\sqrt{1-\frac{2a}{x}}}$$

$$=\frac{2(a-b)}{1+1}=a-b=13$$

이므로 $6-b=13$ $\therefore b=-7$ ····· ❷

STEP 3 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}$의 값 구하기

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+7)=8$$ ····· ❸

채점 요소	배점
❶ a의 값 구하기	40 %
❷ b의 값 구하기	40 %
❸ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}$의 값 구하기	20 %

09

해결전략 I 분모의 극한값이 0이고 극한값이 존재하므로 분자의 극한값도 0이다.

STEP 1 a의 값 구하기

$x\to 1$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+a}-2)=0$이므로 $\sqrt{1+a}-2=0$

$\therefore a=3$

STEP 2 b의 값 구하기

$$\therefore b=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

STEP 3 $a+4b$의 값 구하기

$\therefore a+4b=3+4\times\frac{1}{4}=4$

10

해결전략 I 미정계수가 포함된 $\infty-\infty$ 꼴의 함수에서 $x\to\infty$일 때 극한값이 존재하면 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 분자와 분모의 최고차항의 차수를 비교한다.

STEP 1 a, b의 값 구하기

$a\le 0$이면 $\lim_{x\to\infty}\{4x^2+4x+3\}-(ax+b)\}=\infty$이므로 $a>0$이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\{\sqrt{4x^2+4x+3}-(ax+b)\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2+4x+3)-(a^2x^2+2abx+b^2)}{\sqrt{4x^2+4x+3}+(ax+b)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4-a^2)x^2+(4-2ab)x+3-b^2}{\sqrt{4x^2+4x+3}+(ax+b)}$$ ····· ㉠

㉠의 극한값이 0이려면 분자의 차수가 분모의 차수 1보다 작아야 하므로

$4-a^2=0$, $4-2ab=0$

이때 $a>0$이므로 $a=2$, $b=1$ …… ❶

STEP 2 $\lim_{x\to\infty}x\{\sqrt{4x^2+4x+3}-(ax+b)\}$의 값 구하기

$$\therefore \lim_{x\to\infty}x\{\sqrt{4x^2+4x+3}-(ax+b)\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\{\sqrt{4x^2+4x+3}-(2x+1)\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{x\times\frac{(4x^2+4x+3)-(2x+1)^2}{\sqrt{4x^2+4x+3}+(2x+1)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4x+3}+2x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+2+\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$$ …… ❷

STEP 3 p^2+q^2의 값 구하기

따라서 $p=2$, $q=1$이므로

$p^2+q^2=2^2+1^2=5$ …… ❸

채점 요소	배점
❶ a, b의 값 구하기	40 %
❷ $\lim_{x\to\infty}x\{\sqrt{4x^2+4x+3}-(ax+b)\}$의 값 구하기	40 %
❸ p^2+q^2의 값 구하기	20 %

11

해결전략 I $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ (k는 실수)일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$임을 이용하여 $f(x)$의 식을 추론한다.

STEP 1 $f(x)$ 구성하기

$x\longrightarrow -1$일 때, (분모)$\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow 0$이다.

즉, $f(-1)=0$

또, $x\longrightarrow 2$일 때 (분모)$\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow 0$이다.

즉, $f(2)=0$

$f(x)=(x+1)(x-2)(ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓자.

STEP 2 a, b의 값 구하기

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)(ax+b)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}(x-2)(ax+b)$$
$$=-3\times(-a+b)=-3$$

$\therefore -a+b=1$ …… ㉠

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)(ax+b)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+1)(ax+b)$$
$$=3\times(2a+b)=12$$

$\therefore 2a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

STEP 3 $f(3)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=(x+1)(x-2)(x+2)$이므로

$f(3)=4\times 1\times 5=20$

12

해결전략 I $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한식에서 $f(x)$의 이차항의 계수를 찾고 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한식에서 $f(x)$의 인수를 찾아 $f(x)$의 식을 추론한다.

STEP 1 $f(x)$ 구성하기

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+3}=1$이므로 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=5$에서 $x\longrightarrow 3$일 때, (분모)$\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow 0$이다.

즉, $f(3)=0$

$f(x)=(x-3)(x+a)$ (a는 상수)로 놓자.

STEP 2 a의 값 구하기

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+a)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+a)$$
$$=3+a=5$$

$\therefore a=2$

STEP 3 $f(7)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=(x-3)(x+2)$이므로

$f(7)=4\times 9=36$

13

해결전략 I $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한식에서 $f(x)-x^3$의 차수와 최고차항의 계수를 찾아 $f(x)$의 식을 미지수를 사용해 세우고, $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한식을 이용하여 미지수를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구성하기

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{5x^2}=2$이므로 $f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 10인 이차식이다.

$f(x)-x^3=10x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^3+10x^2+ax+b$

이때 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{x+1}$의 값이 존재하고 $x\longrightarrow-1$일 때,

(분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}(x^3+10x^2+ax+b)=0$에서

$-1+10-a+b=0$ $\quad\therefore b=a-9$

$\therefore f(x)=x^3+10x^2+ax+a-9$

STEP 2 a, b의 값 구하기

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+10x^2+ax+a-9}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+9x+a-9)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x^2+9x+a-9)$$
$$=a-17=-8$$

$\therefore a=9$, $b=0$

STEP 3 $f(2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^3+10x^2+9x$이므로

$f(2)=8+40+18=66$

14

해결전략 | $f(x)$에 대한 부등식으로 변형한 후 각 변에 극한을 취한다.

STEP 1 부등식 변형하기

$x>1$에서 $x^2-1>0$이므로

$2x^2+3x-1<(x^2-1)f(x)<2x^2+3x+1$의 각 변을 x^2-1로 나누면

$$\frac{2x^2+3x-1}{x^2-1}<f(x)<\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$$

STEP 2 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$의 값 구하기

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{x^2-1}=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-1}=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$

15

해결전략 | 각 선분의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 각 선분의 길이를 t에 대한 식으로 나타내기

$P(t, 0)$이므로 $\overline{OP}=t$

점 P와 원의 중심 $(0, 2)$ 사이의 거리가 $\sqrt{t^2+4}$이고 원의 반지름의 길이가 2이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{t^2+4}-2$, $\overline{PR}=\sqrt{t^2+4}+2$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore\lim_{t\to0+}\frac{\overline{PQ}\times\overline{PR}}{\overline{OP}^2-\overline{PQ}^2}=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{t^2+4}-2)(\sqrt{t^2+4}+2)}{t^2-(\sqrt{t^2+4}-2)^2}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{t^2+4}-2)(\sqrt{t^2+4}+2)}{4(\sqrt{t^2+4}-2)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{t^2+4}+2}{4}=1$$

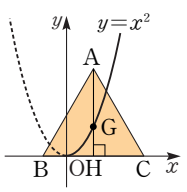
16

해결전략 | $S(a)$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 삼각형 ABC의 꼭짓점의 좌표를 a로 표현하기

점 G의 좌표가 $G(a, a^2)$이고 점 G가 정삼각형 ABC의 무게중심이므로 $A(a, 3a^2)$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{BH}=\overline{CH}=\overline{AH}\tan30^\circ$

$=3a^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}a^2$

$\therefore B(a-\sqrt{3}a^2, 0)$, $C(a+\sqrt{3}a^2, 0)$ ····· ❶

STEP 2 $S(a)$ 구하기

따라서 삼각형 ABC의 넓이 $S(a)$는

$S(a)=\dfrac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}a^2\times3a^2=3\sqrt{3}a^4$ ····· ❷

STEP 3 $\lim\limits_{a\to\sqrt{3}}\dfrac{S(a)-27a}{a^2-3}$의 값 구하기

$$\lim_{a\to\sqrt{3}}\frac{S(a)-27a}{a^2-3}=\lim_{a\to\sqrt{3}}\frac{3\sqrt{3}a^4-27a}{a^2-3}$$
$$=\lim_{a\to\sqrt{3}}\frac{a\{(\sqrt{3}a)^3-3^3\}}{(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}$$
$$=\lim_{a\to\sqrt{3}}\frac{a(\sqrt{3}a-3)(3a^2+3\sqrt{3}a+9)}{(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}$$
$$=\lim_{a\to\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}a(3a^2+3\sqrt{3}a+9)}{a+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{3\times27}{2\sqrt{3}}=\frac{27}{2}\sqrt{3}$$ ····· ❸

STEP 4 $p+q$의 값 구하기

따라서 $p=2$, $q=27$이므로

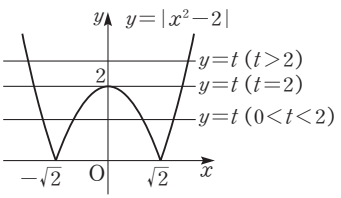
$p+q=2+27=29$ ····· ❹

채점 요소	배점
❶ 삼각형 ABC의 꼭짓점의 좌표를 a로 나타내기	25 %
❷ $S(a)$ 구하기	25 %
❸ $\lim\limits_{a\to\sqrt{3}}\dfrac{S(a)-27a}{a^2-3}$의 값 구하기	40 %
❹ $p+q$의 값 구하기	10 %

17

해결전략 I 함수 $y=|x^2-2|$의 그래프를 그려 $f(t)$를 구한다.

STEP 1 t의 값의 범위에 따라 $f(t)$ 구하기



$y=|x^2-2|$의 그래프가 위의 그림과 같으므로

$$f(t)=\begin{cases}0\ (t<0)\\2\ (t=0)\\4\ (0<t<2)\\3\ (t=2)\\2\ (t>2)\end{cases}$$

STEP 2 $g(0)+g(2)$의 구하기

$g(a)=\lim\limits_{t\to a+}\{f(t)-f(a)\}$이므로

$g(0)=\lim\limits_{t\to 0+}\{f(t)-f(0)\}=4-2=2$

$g(2)=\lim\limits_{t\to 2+}\{f(t)-f(2)\}=2-3=-1$

$\therefore\ g(0)+g(2)=2+(-1)=1$

상위권 도약 문제 39~40쪽

01 ③ **02** ③ **03** ④ **04** 2 **05** ③
06 2 **07** 16

01

해결전략 I $f^{-1}(3x)=y$로 놓고, 역함수의 뜻을 이용하여 x를 y에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 x를 y에 대한 식으로 나타내기

$f^{-1}(3x)=y$라고 하면 $f(y)=3x$

즉, $y^3+4y^2+6y=3x$이므로 $x=\dfrac{y^3+4y^2+6y}{3}$

STEP 2 극한값 구하기

$x\longrightarrow 0$일 때, $y\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{-1}(3x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{1}{3}(y^3+4y^2+6y)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{3y}{y(y^2+4y+6)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{3}{y^2+4y+6}=\frac{1}{2}$$

02

해결전략 I 극한값이 존재하면 좌극한과 우극한이 같아야 함을 이용한다.

STEP 1 좌극한 구하기

$x\longrightarrow a-$일 때,

$\lim\limits_{x\to a-}[x]=a-1$, $\lim\limits_{x\to a-}[-2x]=-2a$

$$\therefore\ \lim_{x\to a-}\frac{[x]^2-2x}{[-2x]}=\frac{(a-1)^2-2a}{-2a}=\frac{a^2-4a+1}{-2a}$$

STEP 2 우극한 구하기

$x\longrightarrow a+$일 때,

$\lim\limits_{x\to a+}[x]=a$, $\lim\limits_{x\to a+}[-2x]=-2a-1$

$$\therefore\ \lim_{x\to a+}\frac{[x]^2-2a}{[-2x]}=\frac{a^2-2a}{-2a-1}$$

STEP 3 a의 값 구하기

극한값이 존재하려면 좌극한과 우극한이 같아야 하므로

$$\frac{a^2-4a+1}{-2a}=\frac{a^2-2a}{-2a-1}$$

$(a^2-4a+1)(2a+1)=2a(a^2-2a)$

$3a^2+2a-1=0$, $(a+1)(3a-1)=0$

$\therefore\ a=-1\ (\because\ a$는 정수)

03

해결전략 I 치환을 이용해 좌극한과 우극한이 같아지도록 하는 미지수의 값을 구한다.

STEP 1 일차항 계수, 상수를 미지수로 나타내기

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+mx+n$ (m, n은 상수)으로 놓자.

STEP 2 m의 값 구하기

$\lim\limits_{x\to 0}|x|\left\{f\left(\dfrac{1}{x}\right)-f\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right\}=a$이므로

$$\lim_{x\to 0+}x\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0-}(-x)\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$\dfrac{1}{x}=t$라고 하면 $x\longrightarrow 0+$일 때, $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to 0+}x\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-f(-t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2+mt+n)-(t^2-mt+n)}{t}$$

$=2m$

또, $x\longrightarrow 0-$일 때, $t\longrightarrow-\infty$이므로

$$\lim_{x\to 0-}(-x)\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{f(t)-f(-t)}{-t}$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{(t^2+mt+n)-(t^2-mt+n)}{-t}$$

$=-2m$

즉, $2m=-2m$이므로 $m=0$

$\therefore f(x)=x^2+n$

STEP 3 n의 값 구하기

$$\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+n\right)=n=3$$

STEP 4 $f(2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^2+3$이므로 $f(2)=2^2+3=7$

04

해결전략 | $0<x<1$일 때와 $1<x<2$일 때의 $f(x)$의 값의 범위를 구하여 그때의 $[f(x)]$의 값을 각각 구한다.

STEP 1 좌극한 구하기

$0<x<1$일 때, $2<\frac{1}{2}x+2<\frac{5}{2}$이므로

$$[f(x)]=\left[\frac{1}{2}x+2\right]=2$$

$$\therefore \lim_{x\to1-}[f(x)]=2$$

STEP 2 우극한 구하기

$1<x<2$일 때, $\frac{5}{2}<\frac{1}{2}x+2<3$이므로

$$[f(x)]=\left[\frac{1}{2}x+2\right]=2$$

$$\therefore \lim_{x\to1+}[f(x)]=2$$

STEP 3 $\lim_{x\to1}[f(x)]$의 값 구하기

이때 좌극한과 우극한이 같으므로 $\lim_{x\to1}[f(x)]=2$

05

해결전략 | 가우스 함수의 성질을 이용해 가능한 함수를 구성한다.

STEP 1 $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$의 값 구하기

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]^2=9$$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=-3 \text{ 또는 } \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=3$$

따라서 $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$의 값이 존재하므로 $f(x)$는 일차함수이다.

STEP 2 $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=-3$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$의 값 구하기

(i) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=-3$일 때,

즉 $-3\le\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}<-2$

i) $f(x)=-3x+k\,(k>0)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+k}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(-3+\frac{k}{x}\right)$$

$$=-3$$

ii) $f(x)=-2x-k\,(k>0)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-k}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(-2-\frac{k}{x}\right)$$

$$=-2$$

STEP 3 $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=3$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$의 값 구하기

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=3$일 때, 즉 $3\le\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}<4$

i) $f(x)=3x+k\,(k>0)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+k}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{k}{x}\right)=3$$

ii) $f(x)=4x-k\,(k>0)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-k}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(4-\frac{k}{x}\right)=4$$

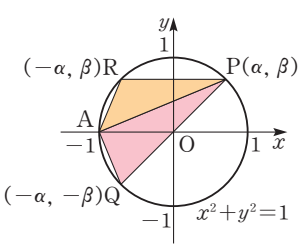
STEP 4 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$의 값으로 가능한 모든 값의 합 구하기

(i), (ii)에 의하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$의 값은 -3, -2, 3, 4이므로 구하는 합은 $-3+(-2)+3+4=2$

06

해결전략 | 각 점의 좌표를 α, β로 나타낸 다음 $S(\alpha)$, $T(\alpha)$를 구한다.

STEP 1 각 점의 좌표를 α, β로 나타내기



점 $P(\alpha, \beta)$가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$\alpha^2+\beta^2=1$ …… ㉠

이고 점 Q, R의 좌표는 $Q(-\alpha, -\beta)$, $R(-\alpha, \beta)$

STEP 2 $S(\alpha)$ 구하기

삼각형 APQ에서 $\angle PAQ=90^\circ$이므로

$$S(\alpha)=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AQ}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha+1)^2+\beta^2}\sqrt{(\alpha-1)^2+\beta^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha+1}\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha+1}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha+2}\sqrt{-2\alpha+2}\ (\because \text{㉠})$$
$$=\sqrt{1-\alpha^2}$$

STEP 3 $T(\alpha)$ 구하기

$$T(\alpha)=\frac{1}{2}\times 2\alpha\times\beta=\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\ (\because \text{㉠})$$

STEP 4 $\lim\limits_{\alpha\to 1-}\dfrac{S(\alpha)\times T(\alpha)}{1-\alpha}$의 값 구하기

$$\therefore \lim_{\alpha\to 1-}\frac{S(\alpha)\times T(\alpha)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1-}\frac{\sqrt{1-\alpha^2}\times\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha}$$
$$=\lim_{\alpha\to 1-}\frac{\alpha(1+\alpha)(1-\alpha)}{1-\alpha}$$
$$=\lim_{\alpha\to 1-}\alpha(1+\alpha)=2$$

07

해결전략 | x의 값의 범위를 $8<x<9$, $7<x<8$일 때로 나누어 함숫값을 각각 비교한다.

STEP 1 α의 값 구하기

(i) $8<x<9$일 때

x보다 작은 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로 $f(x)=4$

이때 $2f(x)=8<x$이므로 $g(x)=f(x)=4$

따라서 $\lim\limits_{x\to 8-}g(x)=\lim\limits_{x\to 8-}4=4$이므로

$\alpha=4$

STEP 2 β의 값 구하기

(ii) $7<x<8$일 때

x보다 작은 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로 $f(x)=4$

이때 $2f(x)=8>x$이므로 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{4}$

따라서 $\lim\limits_{x\to 8-}g(x)=\lim\limits_{x\to 8-}\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$이므로

$\beta=\dfrac{1}{4}$

STEP 3 $\dfrac{\alpha}{\beta}$의 값 구하기

(i), (ii)에 의하여 $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{4}{\frac{1}{4}}=16$

02 함수의 연속

개념확인 42~43쪽

01 답 (1) 연속 (2) 불연속 (3) 연속

(1) $f(x)=x+1$로 놓으면 $f(0)=1$이므로 함숫값이 존재한다.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$이므로 극한값이 존재한다.

따라서 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$이므로 $x=0$에서 연속이다.

(2) $x=0$일 때, 함숫값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

(3) $f(x)=|x|$로 놓으면 $f(0)=0$이므로 함숫값이 존재한다.

$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$이므로 극한값이 존재한다.

따라서 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=f(0)=0$이므로 $x=0$에서 연속이다.

02 답 (1) $[-1, 2]$ (2) $(2, 4)$ (3) $(0, 4]$ (4) $[3, \infty)$

03 답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $[2, \infty)$

(3) $(-\infty, 1)\cup(1, \infty)$

04 답 ㄱ, ㄴ

ㄷ. $f(x)\neq 0$이어야 함수 $f(x)$는 연속이다.

05 답 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -4

(2) 최댓값: 1, 최솟값: $\dfrac{1}{2}$

06 답 (가) 연속 (나) 연속 (다) 사잇값의 정리

필수유형 01 45쪽

01-1 답 (1) 연속 (2) 연속 (3) 불연속 (4) 연속

해결전략 | $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=f(0)$일 때, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이다.

(1) $f(0)=0$이므로 함숫값이 존재한다.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)=0$이므로 극한값이 존재한다.

따라서 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(2) $f(0)=\sqrt{3}$이므로 함숫값이 존재하다.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+3}=\sqrt{3}$이므로 극한값이 존재한다.

따라서 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=\sqrt{3}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(3) $x=0$일 때, 함숫값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(4) $f(0)=1$이므로 함숫값이 존재한다.

$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to0}(x+1)=1$이므로 극한값이 존재한다.

따라서 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

01-2 답 6

해결전략 | 함수의 연속의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2+} f(x)=f(2)$

즉, $a+2=3a-2=f(2)$이므로

$a+2=3a-2$에서 $a=2$

STEP 2 $f(2)$의 값 구하기

이때 $f(2)=a+2=2+2=4$이므로

$a+f(2)=2+4=6$

01-3 답 $x=-2$에서 불연속, $x=2$에서 연속

해결전략 | $x=-2$, $x=2$에서 극한값과 함숫값을 조사한다.

STEP 1 $x=-2$에서 연속 조사하기

$f(x)=\begin{cases}x-2 & (x\le-2 \text{ 또는 } x\ge2)\\ x^2-4 & (-2<x<2)\end{cases}$

$x=-2$에서 $f(-2)=-2-2=-4$

$\lim_{x\to-2-} f(x)=\lim_{x\to-2-}(x-2)=-4$

$\lim_{x\to-2+} f(x)=\lim_{x\to-2+}(x^2-4)=0$

$\lim_{x\to-2-} f(x)\ne\lim_{x\to-2+} f(x)$이므로 $x=-2$에서 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

STEP 2 $x=2$에서 연속 조사하기

또, $x=2$에서 $f(2)=2-2=0$

$\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2-}(x^2-4)=0$

$\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2+}(x-2)=0$

즉, $\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2+} f(x)=0$이므로 $x=2$에서 극한값이 존재한다.

따라서 $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

01-4 답 7

해결전략 | $x=a$에서 연속이면 $x=a$에서 극한값과 함숫값이 같음을 이용한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이다.

$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}(2x+5)=7$이므로

$a=f(1)=7$

01-5 답 3

해결전략 | 분모가 0이 되면 함숫값이 존재하지 않음을 이용한다.

STEP 1 불연속일 조건 파악하기

함수 $f(x)$에서 분모가 0이 되면 함숫값이 존재하지 않으므로 분모를 0이 되게 하는 x의 값을 구한다.

STEP 2 불연속인 x의 값의 개수 구하기

$x-\frac{6}{x}=0$에서 $x^2-6=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{6}$

또, $\frac{6}{x}=0$에서 $x=0$

따라서 불연속이 되도록 하는 x의 값은 $-\sqrt{6}$, 0, $\sqrt{6}$의 3개이다.

01-6 답 3

해결전략 | $x=a$에서 연속이면 극한값이 존재하므로 좌극한과 우극한이 같아지도록 한다.

STEP 1 $x=1$에서 연속이기 위한 a의 값 구하기

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)$이다.

$\lim_{x\to1-} f(x)=a^2-2a-3$

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}(x-1)=0$

즉, $a^2-2a-3=0$이므로 $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$ ····· ㉠

STEP 2 $x=2$에서 연속이기 위한 a의 값 구하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이면

$\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2+} f(x)$이다.

$\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2-}(x-1)=1$

$\lim_{x\to2+} f(x)=a^2-5a+7$

즉, $a^2-5a+7=1$이므로 $a^2-5a+6=0$

$(a-2)(a-3)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=3$ ····· ㉡

STEP 3 a의 값 구하기

㉠, ㉡을 모두 만족시켜야 하므로 $a=3$

필수유형 02 47쪽

02-1 답 2

해결전략 | 그래프를 통해 불연속인 점을 찾고 각 점에서 좌극한과 우극한이 같은지 확인한다.

STEP 1 $x=-1$에서 극한값, 연속 조사하기

$f(x)$는 $x=-1$에서 정의되지 않으므로 불연속이다.

$\lim\limits_{x\to-1-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+} f(x)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극한값이 존재한다.

STEP 2 $x=1$에서 극한값, 연속 조사하기

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to1+} f(x)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

STEP 3 ab의 값 구하기

따라서 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 1의 1개이고, 불연속이 되는 x의 값은 -1, 1의 2개이므로

$a=1$, $b=2$

$\therefore ab=1\times2=2$

02-2 답 ㄴ, ㄷ

해결전략 | 극한값과 연속의 정의를 이용한다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to3-} f(x)=\lim\limits_{x\to3+} f(x)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to3} f(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to3} f(x)\neq1$ (거짓)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1-} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to1+} f(x)$

즉, $x=1$에서 함수 $f(x)$의 극한값은 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서 불연속이므로 3개의 점에서 불연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02-3 답 ㄴ

해결전략 | 극한값과 연속의 정의를 이용한다.

ㄱ. $f(1)=2$이므로 $x=1$에서 함숫값이 정의되어 있다. (거짓)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1-} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=3$이므로

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to1+} f(x)$

즉, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

02-4 답 -1, 0

해결전략 | $f(x)$ 또는 $g(x)$가 불연속인 점에서 $f(x)g(x)$의 함숫값과 극한값을 각각 구하여 비교한다.

STEP 1 $f(x)$ 또는 $g(x)$가 불연속인 점 찾기

$f(x)$ 또는 $g(x)$가 불연속인 점은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$

STEP 2 $x=-1$에서 연속 조사하기

$f(-1)g(-1)=(-1)\times1=-1$

$\lim\limits_{x\to-1-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to-1-} f(x)\times\lim\limits_{x\to-1-} g(x)$

$=1\times(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to-1+} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to-1+} f(x)\times\lim\limits_{x\to-1+} g(x)$

$=(-1)\times1=-1$

즉, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)g(x)=f(-1)g(-1)=-1$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

STEP 3 $x=0$에서 연속 조사하기

$f(0)g(0)=0\times(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to0-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0-} f(x)\times\lim\limits_{x\to0-} g(x)$

$=(-1)\times0=0$

$\lim\limits_{x\to0+} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0+} f(x)\times\lim\limits_{x\to0+} g(x)$

$=0\times(-1)=0$

즉, $\lim\limits_{x\to0} f(x)g(x)=f(0)g(0)=0$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

STEP 4 $x=1$에서 연속 조사하기

$f(1)g(1)=1\times0=0$

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-} f(x)\times\lim\limits_{x\to1-} g(x)$

$=(-1)\times0=0$

$\lim\limits_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1+} f(x)\times\lim\limits_{x\to1+} g(x)$

$=(-1)\times1=-1$

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)g(x)\neq\lim\limits_{x\to1+} f(x)g(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to1} f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 $x=-1$, $x=0$에서 $f(x)$ 또는 $g(x)$는 불연속이

지만 함수 $f(x)g(x)$는 연속이다.

풍쌤의 비법

그래프가 주어진 함수에서 불연속인 점의 조사

그래프가 끊어진 x의 값에서 불연속을 조사한다.

(1) $x=a$에서 함숫값이 존재하지 않는 경우

(2) $x=a$의 좌우에서의 극한값이 다른 경우

(3) $x=a$에서의 극한값과 함숫값이 다른 경우

02-5 답 연속

해결전략 | $x=2$에서 $f(x)g(x)$의 함숫값과 극한값을 조사한다.

STEP 1 함숫값 조사하기

$f(2)=2$, $g(2)=0$이므로

$f(2)g(2)=2\times0=0$

STEP 2 극한값 조사하기

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)\times\lim\limits_{x\to2-}g(x)=0\times1=0$

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)\times\lim\limits_{x\to2+}g(x)=0\times3=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to2}f(x)g(x)=0$

STEP 3 연속성 조사하기

따라서 $\lim\limits_{x\to2}f(x)g(x)=f(2)g(2)=0$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

02-6 답 ㄱ, ㄹ

해결전략 | 극한값과 연속의 정의를 이용한다.

STEP 1 $\lim\limits_{x\to-1}|f(x)|$의 값 구하기

ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}|f(x)|=2$

즉, $\lim\limits_{x\to-1}|f(x)|$의 값이 존재한다. (참)

STEP 2 $x=0$에서 함수 $f(x)$의 연속 조사하기

ㄴ. $f(0)=-2$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

STEP 3 $x=1$에서 함수 $|f(x)|$의 연속 조사하기

ㄷ. $|f(1)|=1$, $\lim\limits_{x\to1}|f(x)|=0$이므로

$|f(1)|\neq\lim\limits_{x\to1}|f(x)|$

즉, 함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

STEP 4 $x=2$에서 함수 $\{f(x)\}^2$의 연속 조사하기

ㄹ. $\{f(2)\}^2=1^2=1$

$\lim\limits_{x\to2-}\{f(x)\}^2=1^2=1$

$\lim\limits_{x\to2+}\{f(x)\}^2=(-1)^2=1$

$\therefore\lim\limits_{x\to2}\{f(x)\}^2=1$

즉, $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)\}^2=\{f(2)\}^2$이므로 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=2$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

발전유형 03 49쪽

03-1 답 (1) 연속 (2) 불연속

해결전략 | 함숫값과 극한값을 조사한다.

(1) **STEP 1** 함숫값 조사하기

$f(-1)=-1$이므로

$f(f(-1))=f(-1)=-1$

STEP 2 극한값 조사하기

$f(x)=t$라고 하면 $x\longrightarrow-1-$일 때, $t\longrightarrow1+$이므로

$\lim\limits_{x\to-1-}f(f(x))=\lim\limits_{t\to1+}f(t)=-1$

$x\longrightarrow-1+$일 때, $t\longrightarrow-1+$이므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(f(x))=\lim\limits_{t\to-1+}f(t)=-1$

$\therefore\lim\limits_{x\to-1}f(f(x))=-1$

STEP 3 $x=-1$에서 연속 조사하기

따라서 $\lim\limits_{x\to-1}f(f(x))=f(f(-1))=-1$이므로 함수 $f(f(x))$는 $x=-1$에서 연속이다.

(2) **STEP 1** 함숫값 조사하기

$f(1)=-1$이므로

$f(f(1))=f(-1)=-1$

STEP 2 극한값 조사하기

$f(x)=t$라고 하면 $x\longrightarrow1-$일 때, $t\longrightarrow1-$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(f(x))=\lim\limits_{t\to1-}f(t)=1$

$x\longrightarrow1+$일 때, $t\longrightarrow-1-$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(f(x))=\lim\limits_{t\to-1-}f(t)=1$

$\therefore\lim\limits_{x\to1}f(f(x))=1$

STEP 3 $x=1$에서 연속 조사하기

이때 $\lim\limits_{x\to1}f(f(x))\neq f(f(1))$이므로 함수 $f(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

03-2 답 $-2, 2$

해결전략 | 분수 꼴인 함수는 분모가 0이 되는 x의 값에서 불연속이다.

STEP 1 $(f\circ g)(x)$ 구하기

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{g(x)-1}$$

$$=\frac{1}{(x^2-3)-1}=\frac{1}{x^2-4}$$

STEP 2 $(f\circ g)(x)$가 불연속인 x의 값 구하기

이때 (분모)$=0$인 모든 x의 값에서 불연속이므로

$x^2-4=0$에서 $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

즉, $x=-2$, $x=2$에서 불연속이다.

03-3 답 $0, 2$

해결전략 | $f(x)$ 또는 $g(x)$가 불연속인 점에서 극한값과 함숫값을 각각 구하여 비교한다.

STEP 1 $f(x)$, $g(x)$가 불연속인 점 찾기

함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 불연속이고

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로

$g(x)=0$인 $x=0$, $x=1$, $g(x)=2$인 $x=2$에서 함수 $f(g(x))$의 연속성을 조사해야 한다.

STEP 2 $x=0$에서 연속 조사하기

$f(g(0))=f(0)=0$

$g(x)=t$라고 하면 $x\longrightarrow 0-$일 때, $t\longrightarrow 0-$이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}f(g(x))=\lim\limits_{t\to 0-}f(t)=0$

$x\longrightarrow 0+$일 때, $t\longrightarrow 0+$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}f(g(x))=\lim\limits_{t\to 0+}f(t)=2$

즉, $\lim\limits_{x\to 0}f(g(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

STEP 3 $x=1$에서 연속 조사하기

$f(g(1))=f(0)=0$

$x\longrightarrow 1-$일 때, $t\longrightarrow 1-$이므로

$\lim\limits_{x\to 1-}f(g(x))=\lim\limits_{t\to 1-}f(t)=0$

$x\longrightarrow 1+$일 때, $t\longrightarrow 1+$이므로

$\lim\limits_{x\to 1+}f(g(x))=\lim\limits_{t\to 1+}f(t)=0$

즉, $\lim\limits_{x\to 1}f(g(x))=f(g(1))=0$이므로 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

STEP 4 $x=2$에서 연속 조사하기

$f(g(2))=f(2)=-2$

$x\longrightarrow 2-$일 때, $t\longrightarrow 2-$이므로

$\lim\limits_{x\to 2-}f(g(x))=\lim\limits_{t\to 2-}f(t)=-2$

$x\longrightarrow 2+$일 때, $t\longrightarrow 2+$이므로

$\lim\limits_{x\to 2+}f(g(x))=\lim\limits_{t\to 2+}f(t)=-1$

즉, $\lim\limits_{x\to 2}f(g(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(g(x))$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(g(x))$는 $x=0$, $x=2$에서 불연속이다.

03-4 답 ㄱ, ㄷ

해결전략 | $f(ax+b)$의 극한값은 $ax+b$를 치환하여 구한다.

STEP 1 ㄱ의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=1$ (참)

STEP 2 ㄴ의 참, 거짓 판별하기

ㄴ. $x-3=t$라고 하면

$x\longrightarrow 2+$일 때, $t\longrightarrow -1+$이므로

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)f(x-3)=\lim\limits_{x\to 2+}f(x)\times\lim\limits_{t\to -1+}f(t)$

$=(-2)\times 1=-2$

$x\longrightarrow 2-$일 때, $t\longrightarrow -1-$이므로

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)f(x-3)=\lim\limits_{x\to 2-}f(x)\times\lim\limits_{t\to -1-}f(t)$

$=2\times(-1)=-2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}f(x)f(x-3)=-2$ (거짓)

STEP 3 ㄷ의 참, 거짓 판별하기

ㄷ. $(f\circ f)(-1)=f(f(-1))=f(1)=1$

$f(x)=s$라고 하면

$x\longrightarrow -1+$일 때, $s\longrightarrow 1-$이므로

$\lim\limits_{x\to -1+}(f\circ f)(x)=\lim\limits_{s\to 1-}f(s)=1$

$x\longrightarrow -1-$일 때, $s=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to -1-}(f\circ f)(x)=f(-1)=1$

즉, $\lim\limits_{x\to -1}(f\circ f)(x)=(f\circ f)(-1)=1$이므로 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03-5 답 4

해결전략 | $x=2$에서 $(g\circ f)(x)$의 함숫값과 극한값이 같을 조건을 구하여 $g(x)$의 식을 추론한다.

STEP 1 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=2$에서 연속일 조건 구하기

합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므

로 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(2)$

$f(x)=t$라고 하면 $x\longrightarrow 2$일 때, $t\longrightarrow 3$이므로

$\lim_{x\to 2}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 2}g(f(x))=\lim_{t\to 3}g(t)$

이때 함수 $g(x)$는 다항함수이므로 $x=3$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(g\circ f)(x)=\lim_{t\to 3}g(t)=g(3)$

또, $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(1)$이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $g(3)=g(1)$이어야 한다.

STEP 2 이차함수 $g(x)=0$의 두 근의 합 구하기

따라서 $g(x)=(x-3)(x-1)+k$ (k는 상수)로 놓으면 $g(x)=0$에서

$x^2-4x+3+k=0$

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $g(x)=0$의 두 근의 합은 4이다.

03-6 답 0, 2

해결전략 | 불연속인 점에서 극한값과 함숫값을 각각 구하여 비교한다.

STEP 1 $f(x)$가 불연속인 점 찾기

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로 $x=1$과 $f(x)=1$인 $x=0$, $x=2$에서 함수 $(f\circ f)(x)$가 불연속일 수 있다.

STEP 2 $x=0$에서 연속 조사하기

$(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(1)=2$

$f(x)=t$라고 하면 $x\longrightarrow 0$일 때, $t\longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{x\to 0}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 0}f(f(x))=\lim_{t\to 1-}f(t)=0$

이때 $\lim_{x\to 0}(f\circ f)(x)\neq(f\circ f)(0)$이므로 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

STEP 3 $x=1$에서 연속 조사하기

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=1$

$x\longrightarrow 1$일 때, $t\longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to 1}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 1}f(f(x))=\lim_{t\to 0+}f(t)=1$

즉, $\lim_{x\to 1}(f\circ f)(x)=(f\circ f)(1)$이므로 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

STEP 4 $x=2$에서 연속 조사하기

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(1)=2$

$x\longrightarrow 2$일 때, $t\longrightarrow 1$이므로

$\lim_{x\to 2}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 2}f(f(x))=\lim_{t\to 1}f(t)=0$

이때 $\lim_{x\to 2}(f\circ f)(x)\neq(f\circ f)(2)$이므로 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 불연속이다.

› 참고 $x\longrightarrow 0+$일 때 $f(x)\longrightarrow 1-$, $x\longrightarrow 0-$일 때 $f(x)\longrightarrow 1-$이므로 $x=0$에서의 좌극한과 우극한이 같다.

따라서 두 극한값을 각각 구하지 않아도 된다.

마찬가지로 $x=1$, $x=2$에서도 좌극한값과 우극한값을 각각 구하지 않아도 된다.

풍쌤의 비법

합성함수에서 불연속인 점의 조사

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면 함수 $(f\circ f)(x)$에 대하여

(1) $x=a$

(2) $f(x)=a$

인 x의 값에서 연속성을 조사한다.

필수유형 04 51쪽

04-1 답 3

해결전략 | $x=a$에서 극한값과 함숫값이 같아야 한다.

STEP 1 좌극한, 우극한, 함숫값 구하기

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$이어야 한다.

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(x^2+x)=a^2+a$

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(ax+3)=a^2+3$

$f(a)=a^2+3$

STEP 2 a의 값 구하기

따라서 $a^2+a=a^2+3$이므로

$a=3$

04-2 답 2

해결전략 | $x=-1$, $x=2$에서 좌극한과 우극한, 함숫값을 비교하여 미정계수를 구한다.

STEP 1 연속일 조건 구하기

함수 $y=x^2-2x+a$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[2, \infty)$에서 연속이고 함수 $y=bx+1$은 열린구간 $(-1, 2)$에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1$, $x=2$에서도 연속이어야 한다.

STEP 2 $x=-1$에서 연속일 조건 구하기

$x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)=f(-1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} (x^2-2x+a)=a+3$

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} (bx+1)=1-b$

$f(-1)=a+3$

즉, $a+3=1-b$에서

$a+b=-2$ …… ㉠

STEP 3 $x=2$에서 연속일 조건 구하기

$x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$이어야 하므로

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} (bx+1)=2b+1$

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} (x^2-2x+a)=a$

$f(2)=a$

즉, $2b+1=a$ …… ㉡

STEP 4 $f(1)$, $f(3)$의 값 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x+1 & (-1<x<2) \end{cases}$이므로

$f(1)=-1+1=0$, $f(3)=9-6-1=2$

$\therefore f(1)+f(3)=0+2=2$

04-3 답 -5

해결전략 I $x=a$에서 극한값과 함숫값이 같아야 한다.

STEP 1 좌극한, 우극한, 함숫값 구하기

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$이어야 한다.

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a-} (x-2)=a-2$

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+} \sqrt{2x+k}=\sqrt{2a+k}$

$f(a)=\sqrt{2a+k}$

STEP 2 k의 값 구하기

따라서 $a-2=\sqrt{2a+k}$이므로 양변을 제곱하면

$a^2-4a+4=2a+k$

$\therefore a^2-6a+(4-k)=0$

위의 식은 a에 대한 이차방정식이므로 실수 a가 한 개만 존재하려면 중근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $a^2-6a+(4-k)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=9-(4-k)=0$

$\therefore k=-5$

풍쌤의 비법

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

$D=b^2-4ac$라고 할 때

① 서로 다른 두 실근을 가지면 ➡ $D>0$

② 중근을 가지면 ➡ $D=0$

③ 서로 다른 두 허근을 가지면 ➡ $D<0$

04-4 답 29

해결전략 I $x=-1$, $x=1$에서 좌극한과 우극한, 함숫값을 비교하여 미정계수를 구한다.

STEP 1 연속일 조건 구하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=1$에서도 연속이다.

STEP 2 $x=-1$에서 연속일 조건 구하기

$x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)=f(-1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} (x^2-2x+4)=7$

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} (ax+b)=b-a$

$f(-1)=7$

$\therefore b-a=7$ …… ㉠

STEP 3 $x=1$에서 연속일 조건 구하기

$x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} (ax+b)=a+b$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} (x^2-2x+4)=3$

$f(1)=3$

$\therefore a+b=3$ …… ㉡

STEP 4 a^2+b^2의 값 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=5$

$\therefore a^2+b^2=4+25=29$

04-5 답 -1

해결전략 I 불연속이 될 수 있는 x의 값을 찾고 연속이 되도록 상수의 값을 정한다.

STEP 1 $f(x)$가 불연속인 점 찾기

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} (-x+2)=3$

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} (x^2-2x)=3$

$f(-1)=3$

즉, $\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)=3$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}(x^2-2x)=-1$

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}(-x+2)=1$

즉, $\lim_{x\to1-} f(x)\neq\lim_{x\to1+} f(x)$이므로 $\lim_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

STEP 2 $x=1$에서 연속일 조건 구하기

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=f(1)g(1)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}(x^2-2x)\times\lim_{x\to1-}(x^2+k)$$
$$=(-1)\times(1+k)=-(1+k)$$

$$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}(-x+2)\times\lim_{x\to1+}(x^2+k)$$
$$=1\times(1+k)=1+k$$

$f(1)g(1)=1\times(1+k)=1+k$

따라서 $-(1+k)=1+k$이므로 $2k=-2$

$\therefore k=-1$

풍쌤의 비법

구간에 따라 다르게 정의된 함수의 불연속인 점의 조사

구간의 경계, 구간의 양 끝에서

(1) 함숫값의 존재

(2) 극한값의 존재

(3) 함숫값과 극한값 비교

를 통해 연속성을 조사한다.

04-6 답 0

해결전략 | $x=0$에서 연속일 조건과 $f(x+2)=f(x)$에 적당한 값을 대입하여 만든 식을 이용하여 미정계수를 구한다.

STEP 1 b의 값 구하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0+} f(x)=f(0)$이어야 한다.

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}(ax+1)=1$

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}(3x^2+2ax+b)=b$

$f(0)=b$

$\therefore b=1$

STEP 2 a의 값 구하기

이때 $f(x+2)=f(x)$이므로

$f(1)=f(-1)=1-a$

$f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)$이다.

$\lim_{x\to1-}(3x^2+2ax+1)=3+2a+1=4+2a$이므로

$4+2a=1-a$ $\therefore a=-1$

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

$\therefore a+b=-1+1=0$

필수유형 05 53쪽

05-1 답 32

해결전략 | 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$임과 분수 꼴의 함수에서 $x\to a$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하면 (분자)$\to0$임을 이용하여 미정계수를 구한다.

STEP 1 a, b의 관계식 구하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$

$\therefore \lim_{x\to2}\dfrac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2}=2$

$x\to2$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(a\sqrt{x+2}+b)=0$이므로

$2a+b=0$ $\therefore b=-2a$

STEP 2 $2a-b$의 값 구하기

$$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x+2}-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{a}{4}=2$$

이므로 $a=8$, $b=-16$

$\therefore 2a-b=2\times8-(-16)=32$

05-2 답 21

해결전략 | $x=1$에서 연속일 조건과 분수 꼴의 함수에서 $x\to a$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하면 (분자)$\to0$임을 이용하여 미정계수를 구한다.

STEP 1 실수 전체 집합에서 연속일 조건 확인하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-ax+1}{x-1}=b$$

STEP 2 a의 값 구하기

$x\longrightarrow1$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^3-ax+1)=0$이므로

$2-a=0 \quad \therefore a=2$

STEP 3 $10a+b$의 값 구하기

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2+x-1)=1$$

즉, $b=1$이므로

$10a+b=10\times2+1=21$

풍쌤의 비법

분수 꼴로 정의된 함수에서 불연속인 점의 조사

분모가 0이 되는 x의 값에서 연속성을 조사한다.

05-3 답 -6

해결전략 | $x=2$에서 연속일 조건과 분수 꼴의 함수에서 $x\longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow0$임을 이용하여 미정계수를 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2+} f(x)=f(2)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{x^2+ax}{x-2}=2$$

$x\longrightarrow2-$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to2-}(x^2+ax)=0$이므로

$4+2a=0 \quad \therefore a=-2$

STEP 2 b, c의 값 구하기

또, $\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2+}\frac{\sqrt{x^2+b}+c}{x-2}=2$이고, $x\longrightarrow2+$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to2+}(\sqrt{x^2+b}+c)=0$이므로

$\sqrt{4+b}+c=0 \quad \therefore c=-\sqrt{4+b}$

따라서

$$\lim_{x\to2+}\frac{\sqrt{x^2+b}+c}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{\sqrt{x^2+b}-\sqrt{4+b}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+b}+\sqrt{4+b})}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+b}+\sqrt{4+b}}$$
$$=\frac{4}{2\sqrt{4+b}}=2$$

이므로 $b=-3$, $c=-1$

STEP 3 abc의 값 구하기

$\therefore abc=(-2)\times(-3)\times(-1)=-6$

05-4 답 -2

해결전략 | 분수 꼴의 함수에서 $x\longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow0$임을 이용하여 분자의 인수를 구한다.

STEP 1 a, b의 값 구하기

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{x^3+ax+b}{(x+1)^2}=c$$

$x\longrightarrow-1$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 분자는 $(x+1)^2$을 인수로 갖는다.

즉,

$$x^3+ax+b=(x+1)^2(x+b)$$
$$=(x^2+2x+1)(x+b)$$
$$=x^3+(2+b)x^2+(1+2b)x+b$$

이므로 $b=-2$, $a=1+2b=-3$

STEP 2 $a-2b+c$의 값 구하기

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-1}(x-2)=-3$$

이므로 $c=-3$

$\therefore a-2b+c=-3-2\times(-2)+(-3)=-2$

05-5 답 -1

해결전략 | $f(x)$의 조건을 이용하여 $g(x)$의 함수식을 찾는다.

STEP 1 $f(x)$의 함수식 구성하기

함수 $g(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $x=-1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to-1} g(x)=g(-1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)-4x^2}{x+1}=k$

$x\longrightarrow-1$일 때, (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to-1}\{f(x)-4x^2\}=0$이므로

$f(-1)-4=0 \quad \therefore f(-1)=4$

이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 갖고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=(x+a)^2$ (a는 상수)으로 놓으면

$f(-1)=4$에서

$(-1+a)^2=4,\ -1+a=\pm2$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

$\therefore f(x)=(x+1)^2$ 또는 $f(x)=(x-3)^2$

STEP 2 k의 값 구하기

(i) $a=-1$일 때

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-4x^2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)^2-4x^2}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{-(x+1)(3x-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(-3x+1)=4$$

$\therefore k=4$

(ii) $a=3$일 때

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-4x^2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+3)^2-4x^2}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{-3(x+1)(x-3)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(-3x+9)=12$$

$\therefore k=12$

이때 $k<10$이므로 $k=4,\ a=-1$

STEP 3 $k+g(2)$의 값 구하기

따라서 $x\neq-1$일 때, $g(x)=-3x+1$이므로

$k+g(2)=4+(-5)=-1$

05-6 답 28

해결전략 | $f(x)$의 차수를 구한 후 극한값과 함숫값을 비교한다.

STEP 1 $f(x)$의 차수가 될 수 있는 가장 작은 차수 구하기

함수 $g(x)$가 모든 실수에서 연속이 되려면 $x=-1$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{(x+1)(x-2)}=3$에서

$x\longrightarrow-1$일 때, (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$

마찬가지로 $f(2)=0$

$f(x)$가 이차함수이면 $f(x)=(x+1)(x-2)$이므로

$\lim_{x\to-1}g(x)=1,\ \lim_{x\to2}g(x)=1$

따라서 $g(x)$가 $x=-1$, $x=2$에서 불연속이므로 $f(x)$는 이차함수가 아니다.

$f(x)$가 삼차함수이면 $f(x)=(x+1)(x-2)(x+a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있으므로

$\lim_{x\to-1}g(x)=\lim_{x\to-1}(x+a)=a-1$

$\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}(x+a)=2+a$

이때 $a-1=3$, $a+2=3$을 모두 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 사차 이상의 다항함수이다.

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

로 놓으면

$$\lim_{x\to-1}g(x)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2+ax+b)(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)$$
$$=1-a+b=3$$

$\therefore b-a=2$ ····· ㉠

$$\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x^2+ax+b)(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)$$
$$=4+2a+b=3$$

$\therefore 2a+b=-1$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=1$

STEP 3 $f(3)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-x+1)$이므로

$f(3)=4\times1\times7=28$

필수유형 06 55쪽

06-1 답 4

해결전략 | $x\neq1$일 때 $f(x)$를 구하고 $f(x)$가 $x=1$에서 연

속임을 이용한다.

STEP 1 $x\neq1$일 때 $f(x)$ 구하기

$x\neq1$일 때,

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=x+3$$

STEP 2 $f(1)$의 값 구하기

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x+3)=4$$

06-2 답 1

해결전략 | $x\neq2$일 때 $f(x)$를 구하고, $f(x)$가 $x=-2$에서 연속임을 이용한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$x\neq-2$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+3x+a}{x+2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-2$에서도 연속이다.

$$\therefore f(-2)=\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+3x+a}{x+2}$$

$x\longrightarrow-2$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to-2}(x^2+3x+a)=0$이므로

$a-2=0$ $\quad\therefore a=2$

STEP 2 $a+f(-2)$의 값 구하기

$$\begin{aligned}f(-2)&=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+1)}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2}(x+1)=-1\end{aligned}$$

$\therefore a+f(-2)=2+(-1)=1$

06-3 답 11

해결전략 | $x\neq9$일 때 $f(x)$를 구하고, $f(x)$가 $x=9$에서 연속임을 이용한다.

STEP 1 $f(4)$의 값 구하기

$x\neq9$일 때, → $\sqrt{x}-3=0$을 만족시키는 x의 값

$$f(x)=\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\sqrt{x}+3$$

$\therefore f(4)=\sqrt{4}+3=5$

STEP 2 $f(9)$의 값 구하기

함수 $f(x)$가 $x>0$인 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=9$에서도 연속이다.

$$\therefore f(9)=\lim_{x\to9}(\sqrt{x}+3)=6$$

STEP 3 $f(4)+f(9)$의 값 구하기

$\therefore f(4)+f(9)=5+6=11$

06-4 답 $\frac{1}{12}$

해결전략 | $x^2\neq1$일 때 $f(x)$를 구하고, $f(x)$가 $x=1$에서 연속임을 이용한다.

STEP 1 a의 값 구하기 → $x^2-1=0$을 만족시키는 x의 값

$x\neq1$, $x\neq-1$일 때, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+8}+a}{x^2-1}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}+a}{x^2-1}$$

$x\longrightarrow1$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(\sqrt{x+8}+a)=0$이므로

$\sqrt{1+8}+a=0$ $\quad\therefore a=-3$

STEP 2 $f(1)$의 값 구하기

$$\begin{aligned}\therefore f(1)&=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}+a}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+8}+3)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+8}+3)}\\&=\frac{1}{2\times6}=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

06-5 답 32

해결전략 | $x\neq0$일 때 $f(x)$를 구하고, $f(x)$가 $x=0$에서 연속임을 이용한다.

STEP 1 k의 값 구하기 → $\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}=0$을 만족시키는 x의 값

$x\neq0$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+16x+k}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-4,\ 4)$에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

$$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+16x+k}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$$

$x\longrightarrow0$에서 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}(x^2+16x+k)=0$이므로 $k=0$

STEP 2 $k+f(0)$의 값 구하기

$$\therefore f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+16x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+16)(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{(4+x)-(4-x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+16)(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{2}$$
$$=\frac{16\times(2+2)}{2}=32$$

$\therefore k+f(0)=0+32=32$

풍쌤의 비법

함수 $f(x)=\frac{x^2+16x+k}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$에서 분모가 0이 되게 하는 x의 값은 $\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}=0$에서

$\sqrt{4+x}=\sqrt{4-x}$, $4+x=4-x$

$\therefore x=0$

따라서 함수 $f(x)$가 열린구간 $(-4, 4)$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

06-6 답 -2

해결전략 I $x\neq 1$일 때 $f(x)$를 구하고, $f(x)$가 $x=1$에서 연속임을 이용한다.

STEP 1 a, b의 관계식 구하기

$x\neq 1$일 때, $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$$\therefore f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow 1$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$이므로

$1+a+b=0 \quad \therefore b=-(a+1)$

STEP 2 a, b의 값 구하기

$b=-(a+1)$을 ㉠에 대입하면

$$f(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-(a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+a+1)=2+a$$

이때 $f(1)=3$이므로 $2+a=3$

$\therefore a=1, b=-2$

$\therefore ab=1\times(-2)=-2$

필수유형 07 57쪽

07-1 답 ③

해결전략 I 분수 형태나 합성함수 형태인 함수의 연속을 조사한다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이다.

① $\lim_{x\to a}f(x)\{f(x)-4\}=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}\{f(x)-4\}$
$=f(a)\times\{f(a)-4\}$

이므로 함수 $y=f(x)\{f(x)-4\}$는 $x=a$에서 연속이다.

② $\lim_{x\to a}\frac{a}{f(x)}=\frac{a}{f(a)}$ $(\because f(a)\neq 0)$

이므로 함수 $y=\frac{a}{f(x)}$는 $x=a$에서 연속이다.

③ [반례] $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$이면

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만

$\lim_{x\to 1}f(f(1))=f(0)=1$, $\lim_{x\to 1}f(f(x))=-1$이므로

$f(f(1))\neq\lim_{x\to 1}f(f(x))$

따라서 함수 $f(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

④ 함수 $y=ax^2$, $y=f(x)$는 모두 $x=a$에서 연속이므로 함수 $y=ax^2+f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

⑤ $\lim_{x\to a}|f(x)|=|f(a)|$이므로 함수 $y=|f(x)|$는 $x=a$에서 연속이다.

따라서 $x=a$에서 항상 연속이라고 할 수 없는 것은 ③이다.

참고 ③에서 $f(x)=t$라고 하면 $x\longrightarrow 1+$일 때 $t\longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to 1+}f(f(x))=\lim_{x\to 0+}f(t)=-1$

$x\longrightarrow 1-$일 때 $t\longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to 1-}f(f(x))=\lim_{x\to 0+}f(t)=-1$

$\therefore \lim_{x\to 1-}f(f(x))=-1$

풍쌤의 비법

② 일반적으로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, 함수 $y=\frac{a}{f(x)}$는 $x=a$에서 항상 연속인 것은 아니다.

즉, $f(a)=0$일 때, $x=a$에서 함숫값이 정의되지 않으며 $\lim_{x\to a}\frac{a}{f(x)}$의 값도 존재하지 않으므로 불연속이다.

③ 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이지만 $x=f(a)$에서 연속이라는 조건은 없으므로 함수 $y=f(f(x))$는 $x=a$에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

07-2 답 (1) $(-\infty, \infty)$

(2) $(-\infty, -1), (-1, 4), (4, \infty)$

(3) $(-\infty, 0), (0, \infty)$

해결전략 | 분모가 0이면 함숫값이 정의되지 않음을 이용한다.

(1) $f(x)$는 다항함수이고 $g(x)$도 다항함수이므로

$\{f(x)\}^2 g(x)$는 다항함수이다.

따라서 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-4}=\dfrac{x^2-4}{(x+1)(x-4)}$

분모가 0인 x의 값은 -1, 4이다.

따라서 $x=-1$, $x=4$에서 불연속이므로

구간 $(-\infty, -1)$, $(-1, 4)$, $(4, \infty)$에서 연속이다.

(3) $f(x)-g(x)=(x^2-4)-(x^2-3x-4)=3x$

이므로 $\dfrac{1}{f(x)-g(x)}=\dfrac{1}{3x}$

따라서 $x=0$에서 불연속이므로 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$에서 연속이다.

07-3 답 ㄴ, ㄹ

해결전략 | 연속인 함수와 불연속인 함수를 조합하여 연속인지 조사한다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to -1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to -1-}f(x)+\lim\limits_{x\to -1-}g(x)$

$=0+2=2$

$\lim\limits_{x\to -1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to -1+}f(x)+\lim\limits_{x\to -1+}g(x)$

$=1+2=3$

즉, $\lim\limits_{x\to -1-}\{f(x)+g(x)\}\neq\lim\limits_{x\to -1+}\{f(x)+g(x)\}$

이므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄴ. $-x=t$라고 하면 $x\to -1-$일 때 $t\to 1+$이므로

$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)g(-x)=\lim\limits_{x\to -1-}f(x)\times\lim\limits_{t\to 1+}g(t)$

$=0\times 0=0$

$x\to -1+$일 때 $t\to 1-$이므로

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)g(-x)=\lim\limits_{x\to -1+}f(x)\times\lim\limits_{t\to 1-}g(t)$

$=1\times 0=0$

$f(-1)g(1)=0\times 0=0$

즉, $\lim\limits_{x\to -1}f(x)g(-x)=f(-1)g(1)$이므로 함수

$f(x)g(-x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to -1-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1-}f(x)}{\lim\limits_{x\to -1-}g(x)}=\dfrac{0}{2}=0$

$\lim\limits_{x\to -1+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1+}f(x)}{\lim\limits_{x\to -1+}g(x)}=\dfrac{1}{2}$

즉, $\lim\limits_{x\to -1-}\dfrac{f(x)}{g(x)}\neq\lim\limits_{x\to -1+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$이므로 함수

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄹ. $f(x)=s$라고 하면 $x\to -1-$일 때, $s\to 0-$이므로

$\lim\limits_{x\to -1-}g(f(x))=\lim\limits_{s\to 0-}g(s)=0$

$x\to -1+$일 때, $s\to 1-$이므로

$\lim\limits_{x\to -1+}g(f(x))=\lim\limits_{s\to 1-}g(s)=0$

$g(f(-1))=g(0)=0$

즉, $\lim\limits_{x\to -1}g(f(x))=g(f(-1))$이므로 함수

$g(f(x))$는 $x=-1$에서 연속이다.

따라서 $x=-1$에서 연속인 함수는 ㄴ, ㄹ이다.

07-4 답 4

해결전략 | 극한값과 함숫값을 비교한다.

STEP 1 좌극한, 우극한, 함숫값 구하기

$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$로 놓으면

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-2} & (x<1)\\ \dfrac{-x+a}{x-2} & (x\geq 1,\ x\neq 2)\end{cases}$$

함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이 되려면

$\lim\limits_{x\to 1-}h(x)=\lim\limits_{x\to 1+}h(x)=h(1)$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to 1-}h(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x+2}{x-2}=-3$

$\lim\limits_{x\to 1+}h(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{-x+a}{x-2}=1-a$

$h(1)=1-a$

STEP 2 a의 값 구하기

따라서 $1-a=-3$이므로

$a=4$

07-5 답 9

해결전략 | 분모가 0이면 함숫값이 정의되지 않음을 이용한다.

STEP 1 분모가 0이 되는 x의 값 구하기

$\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-9x+20}=\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-4)(x-5)}$

이므로 분모가 0인 $x=4$, $x=5$에서 함숫값이 정의되지 않는다.

STEP 2 a의 값의 합 구하기

즉, 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 $x=4$, $x=5$에서 불연속이므로

$a=4$ 또는 $a=5$

따라서 구하는 합은 $4+5=9$

풍쌤의 비법

$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{(x-2)(x-4)}{(x-4)(x-5)}=\frac{x-2}{x-5}$

로 계산하여 $x=5$에서만 불연속이라고 생각하지 않도록 주의한다. $x-4\neq0$인지 알 수 없으므로 분모와 분자를 $x-4$로 약분할 수 없다.

07-6 답 5

해결전략 | 이차방정식의 판별식 D가 $D<0$이면 이차방정식의 실근이 없음을 이용한다.

STEP 1 연속일 조건 구하기

$g(a)=0$이면 $x=a$에서 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 정의되지 않으므로 구간 $(-\infty, \infty)$에서 불연속인 점이 존재한다.

다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이려면

$g(x)\neq0$

STEP 2 k의 최솟값 구하기

이차방정식 $x^2+4x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4-k<0 \quad \therefore k>4$

따라서 정수 k의 최솟값은 5이다.

필수유형 08 59쪽

08-1 답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: 0 (2) 최댓값: −1, 최솟값: −2

해결전략 | 최대 · 최소 정리를 이용한다.

(1) 함수 $f(x)=\sqrt{2x-4}$는 닫힌구간 $[2, 4]$에서 연속이므로 최대 · 최소 정리에 의하여 닫힌구간 $[2, 4]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 2, $x=2$에서 최솟값 0을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)=1-\sqrt{x+2}$는 닫힌구간 $[2, 7]$에서 연속이므로 최대 · 최소 정리에 의하여 닫힌구간 $[2, 7]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 -1, $x=7$에서 최솟값 -2를 갖는다.

08-2 답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: −2 (2) 최댓값: $\frac{4}{3}$, 최솟값: 0 (3) 최솟값: 2, 최댓값: 없다.

해결전략 | 최대 · 최소 정리를 이용한다.

(1) 함수 $f(x)=x^2+2x-1$은 다항함수이므로 연속함수이고 주어진 구간이 닫힌구간이므로 최대 · 최소 정리에 의하여 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

따라서 $f(x)=x^2+2x-1$은 $x=1$에서 최댓값 2, $x=-1$에서 최솟값 -2를 갖는다.

(2) 함수 $f(x)=\frac{2x+4}{x+1}=\frac{2}{x+1}+2$는 $x\neq-1$인 모든 실수에서 연속이므로 닫힌구간 $[-4, -2]$에서 연속이다.

최대 · 최소 정리에 의하여 닫힌구간 $[-4, -2]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 최댓값 $\frac{4}{3}$, $x=-2$에서 최솟값 0을 갖는다.

(3) $\lim_{x\to2+} f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$는 최댓값은 갖지 않고 $x=4$에서 최솟값 2를 갖는다.

풍쌤의 비법

최대 · 최소 정리를 이용하여 최댓값과 최솟값을 찾을 때, 주어진 구간이 닫힌구간 $[a, b]$이면

(1) $x=a$, $x=b$에서의 함숫값

(2) 이차함수의 경우 꼭짓점에서의 y의 값

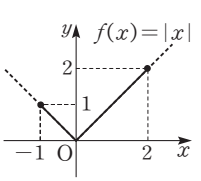
(3) 절댓값 기호를 포함한 함수의 경우 절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 x의 값에서의 함숫값

을 추가로 확인해야 한다.

08-3 답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: 0 (2) 최댓값: 2, 최솟값: 0

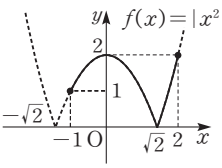
해결전략 | 최댓값과 최솟값을 가질 수 있는 x의 값에서의 함숫값을 구한다.

(1) 함수 $f(x)=|x|$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 2, $x=0$에서 최솟값 0을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)=|x^2-2|$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 최댓값 2, $x=\sqrt{2}$에서 최솟값 0을 갖는다.

08-4 답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: 0
(2) 최댓값: 1, 최솟값: 없다.

해결전략 | 최댓값과 최솟값을 가질 수 있는 x의 값에서의 함숫값을 구한다.

(1) 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.
함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(-1)=0$, $f(0)=3$, $f(1)=1$이므로 최댓값은 3, 최솟값은 0이다.

(2) 함수 $f(x)$는 구간 $(1, 4]$에서 연속이고 $f(3)=1$, $f(4)=0$이지만 $x=1$은 구간에 포함되지 않으므로 최솟값은 갖지 않는다.
따라서 최댓값은 1, 최솟값은 없다.

08-5 답 (1) 최댓값: $-\frac{1}{3}$, 최솟값: -1
(2) 최댓값: $\frac{1}{3}$, 최솟값: 0

해결전략 | 최댓값과 최솟값을 가질 수 있는 x의 값에서의 함숫값을 구한다.

(1) $f(g(x))=\frac{2}{g(x)-5}=\frac{2}{2x+1-5}=\frac{1}{x-2}$이므로 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이다.
$f(g(-1))=-\frac{1}{3}$, $f(g(1))=-1$이므로
최댓값은 $-\frac{1}{3}$, 최솟값은 -1이다.

(2) $g(f(x))=2\times\frac{2}{x-5}+1=\frac{4}{x-5}+1$이므로 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이다.
$g(f(-1))=\frac{1}{3}$, $g(f(1))=0$이므로
최댓값은 $\frac{1}{3}$, 최솟값은 0이다.

08-6 답 12

해결전략 | 함수의 특징을 확인하고 최솟값을 가질 수 있는 x의 값과 최댓값을 가질 수 있는 x의 값을 구분한다.

STEP 1 a, b의 값 구하기

함수 $g(x)$가 임의의 $\frac{1}{2}\le x_1<x_2$에 대하여
$g(x_1)<g(x_2)$이므로
$g(a)=1$, $g(b)=3$
즉, $g(a)=\sqrt{2a-1}=1$이므로 $a=1$
$g(b)=\sqrt{2b-1}=3$이므로 $b=5$

STEP 2 k의 값 구하기

닫힌구간 $[1, 5]$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 주어진 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

$f(1)=\frac{k}{2}$, $f(5)=\frac{k}{6}$이므로

(i) $k>0$일 때
$\frac{k}{2}=3$, $\frac{k}{6}=1$ $\therefore k=6$

(ii) $k<0$일 때
$\frac{k}{2}=1$, $\frac{k}{6}=3$
이때 주어진 식을 만족시키는 k의 값은 없다.

STEP 3 $a+b+k$의 값 구하기

$\therefore a+b+k=1+5+6=12$

필수유형 09 61쪽

09-1 답 풀이 참조

해결전략 | 사잇값의 정리를 이용한다.

STEP 1 사잇값의 정리의 조건 확인하기

$f(x)=-x^3+2x$로 놓으면 $f(x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-2, -1]$에서 연속이다.

STEP 2 사잇값 정리로 실근의 존재 설명하기

$f(-2)=4>0$, $f(-1)=-1<0$, 즉
$f(-2)f(-1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

09-2 답 $1<a<3$

해결전략 | 사잇값의 정리를 이용하여 적어도 하나의 실근을 갖도록 하기 위한 식을 세운다.

STEP 1 사잇값의 정리의 조건 확인하기

$f(x)=x^4-2x^3+ax-2$로 놓으면 함수 $f(x)$는 다항함

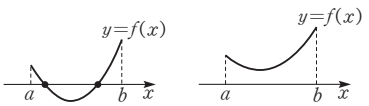
수이므로 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이다.

STEP 2 a의 값의 범위 구하기

이때 $f(1)=a-3$, $f(2)=2a-2$이고 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $f(1)f(2)<0$이어야 하므로

$(a-3)(2a-2)<0$

$\therefore 1<a<3$

> **풍쌤의 비법**
>
> $f(a)f(b)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 실근을 가질 수도, 갖지 않을 수도 있다. 그러므로 $f(a)f(b)>0$이라고 해서 열린구간 (a, b)에서 실근이 존재하지 않는다고 단정지을 수는 없다.
>
> 
>

09-3 답 36

해결전략 | 사잇값의 정리를 이용한다.

STEP 1 열린구간 $(1, 2)$에서 실근을 가질 조건 구하기

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=(x^5+x^3-3x^2+k)-(x^3-5x^2+3)$

$\quad=x^5+2x^2+k-3$

$h(x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 방정식 $h(x)=0$은 $h(1)h(2)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

STEP 2 정수 k의 개수 구하기

$h(1)=k$, $h(2)=k+37$이므로 $k(k+37)<0$

따라서 $-37<k<0$이므로 구하는 정수 k의 개수는 -36, -35, $\cdots$, -1의 36이다.

09-4 답 2

해결전략 | $x=1, 2, 3, \cdots$일 때 함숫값을 구하고 사잇값의 정리를 이용하여 실근이 존재할 구간을 찾는다.

STEP 1 사잇값의 정리의 조건 확인하기

$f(x)=x^3-3x-9$로 놓으면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[n, n+1]$에서 연속이다.

STEP 2 자연수 n의 값 구하기

$f(1)=-11$, $f(2)=-7$, $f(3)=9$이므로

$f(2)f(3)<0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $(2, 3)$에 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재한다.

$\therefore n=2$

09-5 답 ②

해결전략 | 구간의 양 끝에서 함숫값의 부호가 다른 구간을 찾는다.

STEP 1 함숫값 구하기

$f(x)=x^3-3x^2+4x+3$으로 놓으면

$f(-2)=-8-12-8+3=-25<0$

$f(-1)=-1-3-4+3=-5<0$

$f(0)=3>0$

$f(1)=1-3+4+3=5>0$

$f(2)=8-12+8+3=7>0$

$f(3)=27-27+12+3=15>0$

STEP 2 실근이 존재하는 구간 구하기

따라서 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고 $f(-1)f(0)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하는 구간은 $(-1, 0)$이다.

09-6 답 -1

해결전략 | 함숫값의 곱이 음수가 되도록 부등식을 설정한다.

STEP 1 사잇값의 정리의 조건 확인하기

다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이다.

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-1, 2)$에서 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(-1)f(2)<0$이어야 한다.

STEP 2 a의 값의 범위 구하기

$f(-1)f(2)=(a^2-4a+3)(a^2-a-6)$

$\quad=(a-1)(a-3)^2(a+2)<0$

이때 $(a-3)^2\geq0$이므로

$(a-1)(a+2)<0$

$\therefore -2<a<1$

STEP 3 $\alpha+\beta+\gamma$의 값 구하기

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=1$이므로

$\alpha+\beta=-2+1=-1$

발전유형 10 63쪽

10-1 답 2개

해결전략 | 함숫값의 곱이 음수가 되는 부분을 찾아서 사잇값의 정리를 이용한다.

STEP 1 사잇값의 정리의 조건 확인하기

$f(0)>0$, $f(1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$f(2)<0$, $f(3)>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(2, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

STEP 2 실근의 개수 구하기

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 2개의 실근을 갖는다.

10-2 답 5개

해결전략 | 함숫값의 곱이 음수가 되는 부분을 찾아서 사잇값의 정리를 이용한다.

STEP 1 사잇값의 정리의 조건 확인하기

$f(1)f(2)<0$, $f(2)f(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$, $(2, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$f(x)=-f(-x)$에서

$$\begin{aligned}f(1)f(2)&=\{-f(-1)\}\{-f(-2)\}\\&=f(-1)f(-2)<0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(2)f(3)&=\{-f(-2)\}\{-f(-3)\}\\&=f(-2)f(-3)<0\end{aligned}$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$, $(-3, -2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또, $f(0)=-f(0)$이므로 $f(0)=0$이다.

즉, $x=0$은 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

STEP 2 실근의 개수 구하기

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 5개의 실근을 갖는다.

10-3 답 3개

해결전략 | 교점을 구할 수 있는 방정식을 구성하여 사잇값의 정리를 활용한다.

STEP 1 함수 설정하기

두 함수 $y=f(x)$와 $y=x^2$의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)-x^2=0$의 실근과 같다.

$g(x)=f(x)-x^2$으로 놓자.

STEP 2 함숫값의 곱이 음수가 되는 부분 찾기

함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고

$g(0)=f(0)-0^2=1-0=1$,

$g(1)=f(1)-1^2=0-1=-1$,

$g(2)=f(2)-2^2=6-4=2$,

$g(4)=f(4)-4^2=14-16=-2$

이므로 $g(0)g(1)<0$, $g(1)g(2)<0$, $g(2)g(4)<0$

STEP 3 실근의 개수로 교점의 개수 구하기

따라서 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가지므로

두 함수 $y=f(x)$, $y=x^2$의 그래프는 열린구간 $(0, 4)$에서 적어도 3개의 교점을 갖는다.

10-4 답 4

해결전략 | 함숫값의 곱이 음수가 되는 부분을 찾아서 사잇값의 정리를 이용한다.

STEP 1 a의 값 구하기

조건 (가)에서 $f(1)f(2)<0$, $f(2)f(3)<0$이므로

방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$, $(2, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$\therefore a=2$

STEP 2 b의 값 구하기

$h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$$\begin{aligned}h(0)h(1)&=\{f(0)g(0)\}\{f(1)g(1)\}\\&=\{f(0)f(1)\}\{g(0)g(1)\}<0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(1)h(2)&=\{f(1)g(1)\}\{f(2)g(2)\}\\&=\{f(1)f(2)\}\{g(1)g(2)\}>0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(2)h(3)&=\{f(2)g(2)\}\{f(3)g(3)\}\\&=\{f(2)f(3)\}\{g(2)g(3)\}<0\end{aligned}$$

따라서 방정식 $f(x)g(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$, $(2, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가지므로 $b=2$

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

$\therefore a+b=2+2=4$

◉→ 다른 풀이

STEP 2 b의 값 구하기

$f(0)>0$이므로 $f(0)f(1)>0$에서 $f(1)>0$

$f(1)>0$이므로 $f(1)f(2)<0$에서 $f(2)<0$

$f(2)<0$이므로 $f(2)f(3)<0$에서 $f(3)>0$

따라서 $f(0)g(0)<0$, $f(1)g(1)>0$, $f(2)g(2)>0$, $f(3)g(3)<0$이므로

$f(0)g(0)f(1)g(1)<0$

$f(2)g(2)f(3)g(3)<0$

따라서 방정식 $f(x)g(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$, $(2, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가지므로 $b=2$

10-5 답 3개

해결전략 | 조건 (가), (나)에서 인수를 찾아 $f(x)$의 함수식을 구성하고, 함숫값의 곱이 음수가 되는 부분을 찾아서 사잇값의 정리를 이용한다.

STEP 1 함수 $f(x)$를 인수분해하여 나타내기

조건 (가), (나)에서 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

따라서 $\lim_{x\to 1} f(x)=0$, $\lim_{x\to -3} f(x)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x+3)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)로 놓자.

STEP 2 인수를 이용하여 실근을 갖는 범위 구하기

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)Q(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+3)Q(x)$$
$$=4Q(1)=\frac{1}{2}$$

이므로 $Q(1)=\frac{1}{8}$

$$\lim_{x\to -3}\frac{f(x)}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-1)(x+3)Q(x)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to -3}(x-1)Q(x)$$
$$=-4Q(-3)=\frac{1}{2}$$

이므로 $Q(-3)=-\frac{1}{8}$

STEP 3 실근의 개수 구하기

$Q(-3)Q(1)<0$이므로 방정식 $Q(x)=0$은 열린구간 $(-3, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때 $f(x)=(x-1)(x+3)Q(x)$이고 $x=1$, $x=-3$은 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

또, 방정식 $Q(x)=0$의 실근이 열린구간 $(-3, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 닫힌구간 $[-3, 1]$에 방정식 $f(x)=0$의 실근은 적어도 3개 존재한다.

실전 연습 문제 64~66쪽

01 ①	**02** ⑤	**03** ③	**04** ⑤	**05** 4
06 ①	**07** ②, ⑤	**08** ③	**09** 5	**10** ②
11 ④	**12** 3	**13** ③	**14** ⑤	
15 $-1<a<3$		**16** ③		

01

해결전략 | 불연속인 x의 값을 찾고 연속이 되도록 미정계수를 결정한다.

STEP 1 연속이 되는 조건 확인하기

$f(x)$가 $x\neq 1$인 모든 실수의 집합에서 연속이고, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

STEP 2 k의 값 구하기

$\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)^2(2x+k)=0$

$f(1)g(1)=1\times(2+k)$

따라서 $2+k=0$이므로 $k=-2$

02

해결전략 | 치환을 이용하여 좌극한, 우극한을 구한다.

STEP 1 ㄱ의 참, 거짓 확인하기

ㄱ. $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} x=1$

$x=-t$라고 하면 $x\longrightarrow 1-$일 때, $t\longrightarrow -1+$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(-x)=\lim_{t\to -1+} f(t)=\lim_{t\to -1+} t=-1$

$\therefore \lim_{x\to 1-}\{f(x)+f(-x)\}=1+(-1)=0$ (참)

STEP 2 ㄴ의 참, 거짓 확인하기

ㄴ. $x\longrightarrow 1+$일 때 $t\longrightarrow -1-$이므로

$\lim_{x\to 1+}\{f(x)+f(-x)\}=\lim_{x\to 1+} f(x)+\lim_{t\to -1-} f(t)$
$=1+(-1)=0$

$f(1)+f(-1)=1+(-1)=0$

$\therefore \lim_{x\to 1}\{f(x)+f(-x)\}=f(1)+f(-1)$

즉, 함수 $f(x)+f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

STEP 3 ㄷ의 참, 거짓 확인하기

ㄷ. $f(-x)=\begin{cases}1 & (x\leq -1)\\ -x & (-1<x<1)\\ -1 & (x\geq 1)\end{cases}$이므로

$f(x)+f(-x)=0$

따라서 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

03

해결전략 | 극한값과 함숫값을 각각 구하여 비교한다.

STEP 1 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 조건 확인하기

$g(x)=ax+b$ ($a\neq 0$)로 놓으면

$g(0)=\lim_{x\to1-}f(x)=2$이므로 $b=2$

$h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1+}h(x)=h(1)$

STEP 2 a의 값 구하기

$\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1-}f(x)(ax+2)=2(a+2)$

$\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1+}f(x)(ax+2)=0$

$h(1)=f(1)(a+2)=a+2$

이때 $a+2=0$이므로 $a=-2$

STEP 3 $g(-1)$의 값 구하기

따라서 $g(x)=-2x+2$이므로

$g(-1)=4$

◉→ 다른 풀이

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}g(x)=0$

즉, $g(1)=0$이므로 $g(x)=a(x-1)$ (a는 상수)로 놓으면

$g(0)=-a=2 \quad \therefore a=-2$

따라서 $g(x)=-2(x-1)$이므로

$g(-1)=-2\times(-2)=4$

04

해결전략 | 합성함수임에 유의하여 극한값과 함숫값을 비교한다.

STEP 1 연속이 되기 위한 조건 확인하기

합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $\lim_{x\to1+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to1-}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$

이어야 한다.

STEP 2 좌극한, 우극한, 함숫값 비교하기

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3x+a)=3+a$이므로

$\lim_{x\to1-}(g\circ f)(x)=(3+a)^2+a(3+a)+3$

$=2a^2+9a+12$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2-x+2a)=2a$이므로

$\lim_{x\to1+}(g\circ f)(x)=(2a)^2+a\times2a+3=6a^2+3$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2a)=6a^2+3$

STEP 3 a의 값 구하기

따라서 $6a^2+3=2a^2+9a+12$이므로

$4a^2-9a-9=0$, $(4a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{4}$ 또는 $a=3$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$-\frac{3}{4}+3=\frac{9}{4}$

◉→ 다른 풀이

이차함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이고 곡선 $y=g(x)$는 직선 $x=-\frac{a}{2}$에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $(g\circ f)(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되려면 $\underbrace{\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)}_{x=1\text{에서 함수 }f(x)\text{가 연속}}$ 또는

$\underbrace{\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=-a}_{\text{함수 }g(x)\text{의 꼭짓점의 }x\text{좌표가 }1}$이어야 한다.

$1-1+2a=3+a$에서 $a=3$

또, $(1-1+2a)+(3+a)=-a$에서 $a=-\frac{3}{4}$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$3+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{4}$

05

해결전략 | 합성함수에서 불연속이 되기 위한 조건을 확인한다.

STEP 1 불연속일 수 있는 x의 값 확인하기

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고

함수 $g(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이다.

따라서 함수 $(g\circ f)(x)$는 $f(x)$가 불연속인 $x=1$ 또는 $f(x)=-1$, $f(x)=1$인 $x=0$, $x=-1$에서 불연속일 수 있다. …… ❶

STEP 2 극한값과 연속성 확인하기

$f(x)=t$라고 하면 $x\longrightarrow-1-$일 때, $t\longrightarrow1+$이므로

$\lim_{x\to-1-}g(f(x))=\lim_{t\to1+}g(t)=-1$

$x\longrightarrow-1+$일 때, $f(x)\longrightarrow1-$이므로

$\lim_{x\to-1+}g(f(x))=\lim_{t\to1-}g(t)=1$

즉, $\lim_{x\to-1}g(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(f(x))$는 $x=-1$에서 불연속이다. …… ❷

$g(f(0))=g(-1)=1$

$x\longrightarrow0$일 때, $f(x)\longrightarrow-1+$이므로

$\lim_{x\to0}g(f(x))=\lim_{t\to-1+}g(t)=-1$

이때 $g(f(0))\neq\lim_{x\to0}g(f(x))$이므로 극한값은 존재하지만 $x=0$에서 불연속이다. …… ❸

$x\longrightarrow1-$일 때, $f(x)\longrightarrow1-$이므로

$\lim_{x\to1-}g(f(x))=\lim_{t\to1-}g(t)=1$

$x\longrightarrow1+$일 때, $f(x)\longrightarrow-1+$이므로

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{t\to-1+}g(t)=-1$

즉, $\lim_{x\to 1} g(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다. …… ❹

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

따라서 불연속인 점은 3개이고 3개 중 극한값이 존재하는 것은 $x=0$의 1개이므로

$a=3$, $b=1$

$\therefore a+b=3+1=4$ …… ❺

채점 요소	배점
❶ 불연속인 x의 값 확인하기	15 %
❷ $x=-1$에서의 극한값, 연속 확인하기	25 %
❸ $x=0$에서의 극한값, 연속 확인하기	25 %
❹ $x=1$에서의 극한값, 연속 확인하기	25 %
❺ $a+b$의 값 구하기	10 %

06

해결전략 | $x=-1$에서의 좌극한, 우극한, 함숫값이 같도록 미정계수를 결정한다.

STEP 1 좌극한, 우극한, 함숫값 구하기

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)=f(-1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} (x^2+b)=1+b$

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} (ax+2)=-a+2$

$f(-1)=-a+2$

STEP 2 $a+b$의 값 구하기

따라서 $1+b=-a+2$이므로

$a+b=1$

07

해결전략 | $x=a$에서의 좌극한과 우극한, 함숫값이 같아야 연속이다.

STEP 1 좌극한과 우극한, 함숫값 구하기

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$이어야 한다.

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a-} (-2x-2)=-2a-2$

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+} (-x^2+6)=-a^2+6$

$f(a)=-a^2+6$

STEP 2 a의 값 구하기

따라서 $-a^2+6=-2a-2$이므로

$a^2-2a-8=0$, $(a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=4$

08

해결전략 | $x=1$에서의 좌극한과 우극한, 함숫값을 비교하여 미정계수를 구한다.

STEP 1 $x=1$에서 연속일 조건 구하기

함수 $f(x)\{f(x)-a\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-} f(x)\{f(x)-a\}=\lim_{x\to 1+} f(x)\{f(x)-a\}$

$=f(1)\{f(1)-a\}$

STEP 2 좌극한, 우극한, 함숫값 구하기

$\lim_{x\to 1-} f(x)\{f(x)-a\}=-(-1-a)=1+a$

$\lim_{x\to 1+} f(x)\{f(x)-a\}=15(15-a)$

$f(1)\{f(1)-a\}=-(-1-a)=1+a$

STEP 3 a의 값 구하기

따라서 $1+a=15(15-a)$이므로

$16a=224$ $\therefore a=14$

09

해결전략 | 좌극한과 우극한, 함숫값을 비교한다.

STEP 1 연속일 조건 확인하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-2$, $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2+} f(x)=f(-2)$,

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이어야 한다. …… ❶

STEP 2 극한값과 함숫값이 같아지도록 상수 정하기

$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-} (2x+c)=c-4$

$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2+} (ax+2)=-2a+2$

$f(-2)=c-4$

이때 $c-4=-2a+2$이므로 $2a+c=6$ …… ㉠ …… ❷

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} (ax+2)=a+2$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} (x^2-b)=1-b$

$f(1)=1-b$

이때 $a+2=1-b$이므로 $a+b=-1$ …… ㉡ …… ❸

STEP 3 $3a+2b+c$의 값 구하기

㉠+㉡을 하면

$3a+b+c=5$ …… ❹

참고 미지수가 3개이고 관계식이 2개이므로 세 상수 a, b, c의 값을 구할 수 없다. 따라서 구한 관계식을 이용하여 $3a+2b+c$의 값을 구해야 한다.

채점 요소	배점
❶ 연속일 조건 확인하기	15 %
❷ $x=-2$에서 연속인 조건 구하기	35 %
❸ $x=1$에서 연속인 조건 구하기	35 %
❹ $3a+b+c$의 값 구하기	15 %

10

해결전략 | $x=0$에서의 좌극한, 우극한, 함숫값이 같아지도록 하는 k의 값을 구한다.

STEP 1 좌극한, 우극한, 함숫값 구하기

함수 $\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$이어야 한다.

$$\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0-}\{f(x+1)\}^2$$
$$=\lim_{x\to0-}\{(x+1)^2+(x+1)+k\}^2$$
$$=(2+k)^2$$
$$\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0+}\{f(x)\}^2$$
$$=\lim_{x\to0+}(x^2+x+k)^2=k^2$$

$\{g(0)\}^2=\{f(1)\}^2=(2+k)^2$

STEP 2 k의 값 구하기

따라서 $(k+2)^2=k^2$이므로

$4k+4=0 \quad \therefore k=-1$

11

해결전략 | $x=-1$에서 연속일 조건과 분수 꼴의 함수에서 $x\to a$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\to0$임을 이용하여 미정계수를 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+3}{x+1}=b$$

$x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(x^2+ax+3)=0$이므로

$4-a=0 \quad \therefore a=4$

STEP 2 b의 값 구하기

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+3)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x+3)=2$$

따라서 $f(-1)=2$이므로 $b=2$

STEP 3 a^2+b^2의 값 구하기

$\therefore a^2+b^2=4^2+2^2=20$

12

해결전략 | 모든 실수 x에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $(x-a)f(x)=g(x)$일 때, $f(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}$임을 이용한다.

STEP 1 연속일 조건 확인하기

$x\neq-1$, $x\neq1$일 때,

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-1}=\frac{(x^2-1)(x-2)}{x^2-1}=x-2$$

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$, $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$, $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

STEP 2 $f(-1)f(1)$의 값 구하기

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(x-2)=-3$$
$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x-2)=-1$$

$\therefore f(-1)f(1)=(-3)\times(-1)=3$

13

해결전략 | t의 값의 범위에 따라 함수 $f(t)$를 구한다.

STEP 1 $f(t)$ 구하기

$$f(t)=\begin{cases}2 & (|t|>1)\\ 1 & (|t|=1)\\ 0 & (|t|<1)\end{cases}$$

STEP 2 k의 값 구하기

함수 $(x+k)f(x)$가 구간 $(0,\infty)$에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to1-}(x+k)f(x)=\lim_{x\to1+}(x+k)f(x)=(1+k)f(1)$

$(1+k)\times0=(1+k)\times2=1+k$

따라서 $1+k=0$이므로

$k=-1$

STEP 3 $f(1)+k$의 값 구하기

$\therefore f(1)+k=1+(-1)=0$

14

해결전략 | 최대 · 최소 정리의 역 '함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 최댓값과 최솟값을 가지면 이 구간에서 연속이다.'의 반례를 찾는다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 최댓값과 최솟값을 갖지만 연속이 아닌 함수를 찾으면 된다.

①, ③, ④ 연속함수이므로 조건을 만족시키는 예가 될 수 없다.

② $\lim_{x\to0-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to0+} f(x)=\infty$이므로 최댓값과 최솟값이 존재하지 않으므로 반례가 아니다.

⑤ $\lim_{x\to0-} f(x)=-1=f(0)$, $\lim_{x\to0+} f(x)=2$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

$f(-2)=1$, $f(1)=1$, $f(2)=2$이므로

$x=2$에서 최댓값 2, $x=0$에서 최솟값 -1을 갖지만 $x=0$에서 연속이 아니므로 주어진 문제의 반례가 된다.

따라서 조건을 만족시키는 예는 ⑤이다.

15

해결전략 | 사잇값의 정리를 활용하여 함숫값의 곱이 음수가 되도록 한다.

STEP 1 함수 설정하기

$g(x)=f(x)-(x^2-3x)$로 놓으면 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고 방정식 $g(x)=0$의 모든 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=x^2-3x$의 그래프의 교점의 x좌표가 된다. …… ❶

STEP 2 함숫값 구하기

$g(0)=f(0)-0=1$

$g(1)=f(1)-(1-3)=a^2-2a-3$

$g(2)=f(2)-(4-6)=1$ …… ❷

STEP 3 사잇값의 정리를 이용해 a의 값의 범위 구하기

따라서 열린구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근이 존재하려면 $g(0)g(1)<0$, $g(1)g(2)<0$이어야 하므로

$g(1)<0$, 즉 $a^2-2a-3<0$

$(a+1)(a-3)<0$

$\therefore -1<a<3$ …… ❸

채점 요소	배점
❶ 교점을 구할 수 있는 새로운 함수 설정하기	40 %
❷ 함숫값 확인하기	30 %
❸ a의 값의 범위 구하기	30 %

16

해결전략 | 사잇값의 정리를 활용한다.

③ 구간 AC에서 시속 110 km인 지점은 구간 AB에서 적어도 한 곳, 구간 BC에서 적어도 한 곳으로 적어도 두 곳 존재한다.

상위권 도약 문제 67~68쪽

01 24 **02** 7 **03** 5 **04** 13 **05** ㄴ
06 ① **07** 2

01

해결전략 | 분모가 0일 때 함수가 불연속이다.

STEP 1 조건 (가)를 이용하여 $f(x)$ 구성하기

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로 $f(x)=a(x-1)(x-2)$ $(a\neq0)$로 놓자.

STEP 2 a의 값 구하기

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a(x-1)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}a(x-1)=a$$

$\therefore a=4$

STEP 3 $f(4)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=4(x-1)(x-2)$이므로

$f(4)=4\times3\times2=24$

02

해결전략 | 구간의 경계에서 연속이 되도록 미정계수를 결정한다.

STEP 1 $x=1$에서 연속일 조건 이용하여 a, b의 관계식 구하기

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)=f(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}(x^2+ax)=1+a$

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}(-3x+b)=b-3$

$f(1)=b-3$

따라서 $1+a=b-3$이므로

$a-b=-4$ …… ㉠

STEP 2 $f(x)=f(x+4)$를 이용하여 a, b의 관계식 구하기

이때 $f(x)=f(x+4)$이므로

$f(-2)=f(2)$

$4-2a=-6+b$

$\therefore 2a+b=10$ …… ㉡

STEP 3 $a+b+f(b-7)$의 값 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=6$

따라서 $f(b-7)=f(-1)=-1$이므로

$a+b+f(b-7)=2+6+(-1)=7$

03

해결전략 | 연속이 되도록 하는 조건을 확인한다.

STEP 1 a의 값 구하기

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이거나

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 함숫값이 0일 때,

↳ $f(3)g(3)=\lim_{x\to 3} f(x)g(x)=0$이므로 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속

함수 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속이다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속인 함수일 때

$$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-}(ax+5)=3a+5$$

$$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+}(x-4)=-1$$

$$f(3)=-1$$

따라서 $3a+5=-1$이므로 $a=-2$

STEP 2 b의 값 구하기

(ii) 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 함숫값이 0일 때

$$g(3)=9+3b-6=0$$

$$\therefore b=-1$$

STEP 3 ${k_1}^2+{k_2}^2$의 값 구하기

(i), (ii)에 의하여 $k_1=-2$, $k_2=-1$이므로

${k_1}^2+{k_2}^2=(-2)^2+(-1)^2=5$

◉→ 다른 풀이

함수 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 3-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 3+} f(x)g(x)=f(3)g(3)$

이어야 한다.

$\lim_{x\to 3-} f(x)g(x)=(3a+5)(3+3b)$

$\lim_{x\to 3+} f(x)g(x)=-(3+3b)$

$f(3)g(3)=-(3+3b)$

따라서 $(3a+5)(3+3b)=-(3+3b)$이므로

$(3a+5)(3+3b)+(3+3b)=0$

$9(a+2)(b+1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $b=-1$

$\therefore {k_1}^2+{k_2}^2=(-2)^2+(-1)^2=5$

04

해결전략 | $a>0$, $a<0$일 때를 나누어 함수 $f(x)f(x-a)$의 함숫값과 극한값을 조사한다.

STEP 1 연속일 조건 구하기

함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이 되려면

$$\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)$$

$$=f(a)f(0)$$

이때 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 $a=0$이면

$\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 불연속이다.

$\therefore a\neq 0$

STEP 2 양수 a의 값 구하기

(i) $a>0$일 때

$$\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a+} f(x)\times\lim_{x\to 0+} f(x)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}a+7\right)\times 7$$

$$\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a-} f(x)\times\lim_{x\to 0-} f(x)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}a+7\right)\times 1$$

$$f(a)f(0)=-\frac{1}{2}a+7$$

따라서 $7\left(-\frac{1}{2}a+7\right)=-\frac{1}{2}a+7$이므로

$$-\frac{1}{2}a+7=0 \qquad \therefore a=14$$

STEP 3 음수 a의 값 구하기

(ii) $a<0$일 때

$$\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a+}(x+1)\times\lim_{x\to 0+} f(x)$$

$$=(a+1)\times 7$$

$$\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a-}(x+1)\times\lim_{x\to 0-} f(x)$$

$$=(a+1)\times 1$$

$$f(a)f(0)=a+1$$

따라서 $7(a+1)=a+1$이므로

$$a+1=0 \qquad \therefore a=-1$$

STEP 4 모든 실수 a의 값의 합 구하기

(i), (ii)에 의하여 $a=14$ 또는 $a=-1$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$14+(-1)=13$

05

해결전략 | 함수 $g(x)$, $h(x)$를 절댓값 기호가 없는 식으로 나타낸다.

STEP 1 $g(x)$, $h(x)$ 정리하기

$$g(x)=\begin{cases}0 & (f(x)<0)\\ f(x) & (f(x)\geq 0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & (f(x)<0)\\ 0 & (f(x)\geq 0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}f(x) & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

STEP 2 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓 확인하기

ㄱ. $\lim_{x\to1-} h(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=-1$,

$\lim_{x\to1+} h(x)=\lim_{x\to1+} f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to1} h(x)$는 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $x=0$일 때, $(h\circ g)(0)=h(g(0))=h(1)=0$

$x\neq0$일 때, $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(0)=0$

즉, 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $(h\circ g)(x)=0$이므로 함수 $(h\circ g)(x)$는 연속이다. (참)

ㄷ. $h(x)=t$라고 하면 $x\longrightarrow0$일 때, $t\longrightarrow0-$이므로

$\lim_{x\to0}(g\circ h)(x)=\lim_{x\to0} g(h(x))=\lim_{t\to0-} g(t)=0$

$(g\circ h)(0)=g(h(0))=g(0)=1$

$\therefore \lim_{x\to0}(g\circ h)(x)\neq(g\circ h)(0)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

06

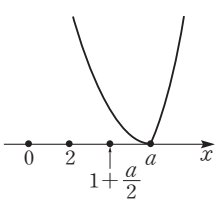
해결전략 | a의 값의 범위를 나누어 각 경우에서 $f(x)$를 확인한다.

STEP 1 a의 값의 범위 확인하기

(i) $a>2$인 경우

$a>1+\frac{a}{2}$이므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다.

$0<x<1+\frac{a}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

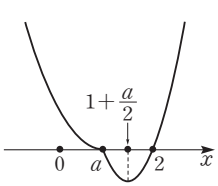


(ii) $0<a<2$인 경우

$a<1+\frac{a}{2}$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $\left[0, 1+\frac{a}{2}\right]$에서 연속이고

$f(0)>0$, $f\left(1+\frac{a}{2}\right)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 0과 $1+\frac{a}{2}$ 사이에 $f(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다.



STEP 2 a의 값 구하기

(i), (ii)에 의하여 $0<a<2$이므로

$f(2)=0$, $f(a)=0$, $f\left(1+\frac{a}{2}\right)=-\left(1-\frac{a}{2}\right)^2$

조건 (나)에 의하여 세 점

$(2, 0)$, $(a, 0)$, $\left(1+\frac{a}{2}, -\left(1-\frac{a}{2}\right)^2\right)$을

꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2-a)\times\left(1-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{8}(2-a)^3=\frac{1}{8}$

$(2-a)^3=1$ $\therefore a=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & (x\le1)\\(x-2)(x-1) & (x>1)\end{cases}$이므로

$f(3a)=f(3)=1\times2=2$

07

해결전략 | 적절한 함수를 구성하여 사잇값의 정리를 이용한다.

STEP 1 함수 설정하기

방정식 $f(2x-1)-2x=0$에서 $2x-1=t$라고 하면

$2x=t+1$이므로

$f(t)-(t+1)=0$

$g(x)=f(x)-(x+1)$로 놓자.

STEP 2 함숫값의 곱이 음수가 되는 부분 찾기

$g(0)=f(0)-1=-3$

$g(1)=f(1)-2=1$,

$g(2)=f(2)-3=1$

$g(3)=f(3)-4=-2$

이므로 $g(0)g(1)<0$, $g(2)g(3)<0$

STEP 3 사잇값의 정리를 이용해 실근의 개수 구하기

$y=f(x)$와 $y=x+1$이 다항함수이므로 $y=g(x)$도 다항함수이고 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$g(0)g(1)<0$, $g(2)g(3)<0$

이면 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $(0, 1)$, $(2, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(2x-1)-2x=0$은 적어도 2개의 실근을 갖는다.

03 미분계수와 도함수

개념확인 70~71쪽

01 답 (1) 2 (2) 1

(1) $\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{9-7}{1}=2$

(2) $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{4-1}{3}=1$

02 답 (1) 3 (2) 6

(1) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(3x-1)-5}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{3(x-2)}{x-2}=3$

(2) $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}(x+3)=6$

03 답 (1) 연속이다. (2) 미분가능하지 않다.

(1) $x=1$에서 함숫값은 $f(1)=|1-1|=0$

극한값은 $\lim_{x\to1}|x-1|=|1-1|=0$이므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$

따라서 함수 $f(x)=|x-1|$은 $x=1$에서 연속이다.

(2) $\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)-0}{x-1}=1$,

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(-x+1)-0}{x-1}=-1$

이므로 $f'(1)$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=|x-1|$은 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

04 답 (1) $y'=-2$ (2) $y'=2x$

(3) $y'=21x^6$ (4) $y'=0$

05 답 (1) $y'=2x+3$

(2) $y'=15x^2+8x-2$

(3) $y'=2x+3$

(4) $y'=8x^3+3x^2+4x+1$

(3) $y'=(x+2)+(x+1)=2x+3$

(4) $y'=2(x^3+x)+(2x+1)(3x^2+1)$

$=8x^3+3x^2+4x+1$

필수유형 01 73쪽

01-1 답 -2

해결전략 | 평균변화율의 정의를 이용한다.

STEP 1 평균변화율 구하기

x의 값이 a에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\frac{f(2)-f(a)}{2-a}=\frac{1-(-a^2+2a+1)}{2-a}$

$=\frac{a^2-2a}{2-a}=-a$

STEP 2 a의 값 구하기

따라서 $-a=2$이므로 $a=-2$

01-2 답 2

해결전략 | 평균변화율의 정의를 이용한다.

STEP 1 평균변화율 구하기

x의 값이 0에서 $0+h$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{(h^2+2h+3)-3}{h}$

$=\frac{h^2+2h}{h}=h+2$

STEP 2 h의 값 구하기

따라서 $h+2=4$이므로 $h=2$

01-3 답 3

해결전략 | 평균변화율과 미분계수의 정의를 이용한다.

STEP 1 평균변화율 구하기

x의 값이 1에서 5까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{7-(-1)}{4}=2$

STEP 2 미분계수 구하기

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{(a+h)^2-4(a+h)+2\}-(a^2-4a+2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{2ah+h^2-4h}{h}$

$=\lim_{h\to0}(2a+h-4)=2a-4$

STEP 3 a의 값 구하기

따라서 $2a-4=2$이므로 $a=3$

01-4 답 3

해결전략 | 평균변화율의 정의를 이용한다.

STEP 1 평균변화율 구하기

x의 값이 -2에서 0까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\frac{0-(-8)}{2}=4$$

x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a(a+1)(a-2)-0}{a}=(a+1)(a-2)$$

STEP 2 a의 값 구하기

따라서 $(a+1)(a-2)=4$이므로

$a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$

$a>0$이므로 $a=3$

01-5 답 4

해결전략 | 평균변화율과 순간변화율의 정의를 이용한다.

STEP 1 평균변화율 구하기

x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^2-3b+1)-(a^2-3a+1)}{b-a}$$
$$=\frac{(b^2-a^2)-3(b-a)}{b-a}$$
$$=b+a-3$$

STEP 2 순간변화율 구하기

함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 순간변화율은

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(2+h)^2-3(2+h)+1\}-(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2+h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(h+1)=1$$

STEP 3 a의 값 구하기

따라서 $b+a-3=1$이므로 $a+b=4$

01-6 답 2

해결전략 | 평균변화율과 미분계수의 정의를 이용한다.

STEP 1 평균변화율 구하기

x의 값이 $-a$에서 $2a$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(2a)-f(-a)}{2a-(-a)}=\frac{(4a^3+8a)-(a^3-4a)}{3a}$$
$$=\frac{3a^3+12a}{3a}=a^2+4$$

STEP 2 미분계수 구하기

함수 $f(x)$의 $x=a-1$에서의 미분계수는

$$f'(a-1)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a-1+h)-f(a-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{a(a-1+h)^2+4(a-1+h)\}-\{a(a-1)^2+4(a-1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2ha^2-2ah+h^2a+4h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(2a^2-2a+ha+4)=2a^2-2a+4$$

STEP 3 a의 값 구하기

따라서 $a^2+4=2a^2-2a+4$이므로

$a^2-2a=0$, $a(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=2$

필수유형 02 75쪽

02-1 답 (1) 3 (2) -1

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용한다.

$f(x)=-x^2+x+3$으로 놓으면

(1) 점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$이므로

$$f'(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(-x^2+x+3)-1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{-x^2+x+2}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{-(x+1)(x-2)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(-x+2)=3$$

(2) 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(-x^2+x+3)-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-x^2+x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-x(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(-x)=-1$$

02-2 답 1

해결전략 | 주어진 두 직선의 기울기를 이용하여 평균변화율을 구한다.

STEP 1 기울기를 이용하여 식 세우기

두 점 $(1, f(1))$, $(2, f(2))$를 지나는 직선의 기울기가 -1이므로

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=-1$$

두 점 $(2, f(2))$, $(3, f(3))$을 지나는 직선의 기울기가 3이므로

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=3$$

STEP 2 평균변화율 구하기

이때 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은 $f(3)-f(2)=3$, $f(2)-f(1)=-1$이므로

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{\{f(3)-f(2)\}+\{f(2)-f(1)\}}{2}$$

$$=\frac{3+(-1)}{2}=1$$

02-3 답 -3

해결전략 | 꼭짓점의 x좌표가 1인 조건을 이용하여 함수식을 설정한다.

STEP 1 함수 $f(x)$ 설정하기

함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 1이므로 $f(x)=a(x-1)^2+b$ ($a\neq 0$, a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

STEP 2 함수 $f(x)$ 구하기

직선 AB의 기울기는

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(4a+b)-b}{2}=2a$$

즉, $2a=1$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+b$$

STEP 3 평균변화율 구하기

따라서 x의 값이 -3에서 -1까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(-1)-f(-3)}{-1-(-3)}=\frac{(2+b)-(8+b)}{2}$$

$$=\frac{-6}{2}=-3$$

02-4 답 6

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 c이면 $f(a)=b$, $f'(a)=c$임을 이용하고, 구하는 극한식을 미분계수의 정의를 이용하여 변형한다.

STEP 1 $f(2)$, $f'(2)$의 값 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$$f(2)=2,\ f'(2)=3$$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)\}^2-2f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)\{f(x)-2\}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left\{f(x)\times\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right\}$$

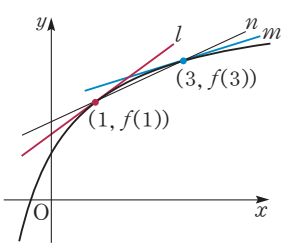
$$=f(2)\times f'(2)$$

$$=2\times 3=6$$

02-5 답 $f'(3)<\frac{f(3)-f(1)}{3-1}<f'(1)$

해결전략 | 주어진 식을 그래프에 나타내어 대소를 비교한다.

STEP 1 주어진 식의 의미 파악하기



$f'(1)$은 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기, 즉 직선 l의 기울기이고,

$f'(3)$은 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 기울기, 즉 직선 m의 기울기이다.

또, $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$은 두 점 $(1, f(1))$, $(3, f(3))$을 지나는 직선 n의 기울기와 같다.

STEP 2 대소 관계 구하기

$$\therefore f'(3)<\frac{f(3)-f(1)}{3-1}<f'(1)$$

풍쌤의 비법

평균변화율과 미분계수는 모두 직선의 기울기를 의미하므로 보기가 주어졌을 때, 기울기로 바꾸어 쓴다.

(1) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$: 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 이은 직선의 기울기

(2) $f'(a)$: 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기

02-6 답 $\frac{b-a}{c-b}$

해결전략 I 그래프와 역함수의 정의를 이용하여 $g(b)$, $g(c)$를 구한 후 평균변화율을 구한다.

STEP 1 함수 $y=g(x)$의 그래프가 지나는 점의 좌표 구하기

$f(a)=b$, $f(b)=c$이고 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(b)=a$, $g(c)=b$

STEP 2 평균변화율 구하기

따라서 x의 값이 b에서 c까지 변할 때의 함수 $g(x)$의 평균변화율은

$$\frac{g(c)-g(b)}{c-b}=\frac{b-a}{c-b}$$

> **풍쌤의 비법**
>
> **역함수**
>
> 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여
>
> $f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

필수유형 03 77쪽

03-1 답 (1) -3 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 0

해결전략 I $\lim_{\bullet\to 0}\frac{f(a+\bullet)-f(a)}{\bullet}$ 꼴로 변형하여 미분계수의 정의를 이용한다.

(1) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}=-3\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}$$
$$=-3f'(a)=-3$$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{2h}=\frac{3}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}$$
$$=\frac{3}{2}f'(a)=\frac{3}{2}$$

(3) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}\times h^2$$
$$=f'(a)\times 0=0$$

03-2 답 (1) 6 (2) 15 (3) 7

해결전략 I $\lim_{\bullet\to 0}\frac{f(a+\bullet)-f(a)}{\bullet}$ 꼴로 변형하여 미분계수의 정의를 이용한다.

(1) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)+f(4)-f(4-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(4)-f(4-h)}{h}$$ (분모, 분자에 -1을 곱해)
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(4-h)-f(4)}{-h}$$
$$=f'(4)+f'(4)=2f'(4)=6$$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+3h)-f(4-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+3h)-f(4)+f(4)-f(4-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+3h)-f(4)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(4)-f(4-2h)}{h}$$ (분모, 분자에 -1을 곱해)
$$=3\lim_{h\to 0}\frac{f(4+3h)-f(4)}{3h}+2\lim_{h\to 0}\frac{f(4-2h)-f(4)}{-2h}$$
$$=3f'(4)+2f'(4)=5f'(4)=15$$

(3) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+2h)-f(4-5h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+2h)-f(4)}{3h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(4)-f(4-5h)}{3h}$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(4+2h)-f(4)}{2h}+\frac{5}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(4-5h)-f(4)}{-5h}$$
$$=\frac{2}{3}f'(4)+\frac{5}{3}f'(4)=\frac{7}{3}f'(4)=7$$

03-3 답 -4

해결전략 I $\lim_{\bullet\to 0}\frac{f(3+\bullet)-f(3)}{\bullet}$ 꼴로 변형하여 미분계수의 정의를 이용한다.

STEP 1 미분계수의 정의 이용하기

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+ah)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+ah)-f(3)}{ah}\times a$$
$$=af'(3)=-2a$$

STEP 2 a의 값 구하기

즉, $-2a=8$이므로 $a=-4$

03-4 답 -2

해결전략 I 증분을 이용하여 미분계수의 정의로 표현한다.

STEP 1 증분을 이용한 평균변화율 구하기

$\Delta x=(1+h)-1=h$이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{h^3+4h^2-2h}{h}$$

STEP 2 $f'(1)$의 값 구하기

$$\therefore f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+4h^2-2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(h^2+4h-2)=-2$$

03-5 답 2

해결전략 | 식을 변형하며 미분계수의 값을 대입한다.

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{h}\times\frac{f(a)-f(a+h)}{f(a)f(a+h)}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right\}\times\lim_{h\to0}\frac{1}{f(a)f(a+h)}$$
$$=-f'(a)\times\frac{1}{\{f(a)\}^2}=-(-2)\times\frac{1}{1^2}=2$$

03-6 답 20

해결전략 | $t=\frac{1}{h}$라 하고 식을 변형한다.

$t=\frac{1}{h}$이라고 하면 $t\longrightarrow\infty$일 때, $h\longrightarrow0+$이므로

$$\lim_{t\to\infty}t\left\{f\left(a+\frac{2}{t}\right)-f\left(a-\frac{2}{t}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\{f(a+2h)-f(a-2h)\}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{f(a)-f(a-2h)}{h}$$
$$=2\lim_{h\to0+}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+2\lim_{h\to0+}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}$$
$$=2f'(a)+2f'(a)=4f'(a)=20$$

필수유형 04 79쪽

04-1 답 (1) 1 (2) $\frac{9}{4}$ (3) $8\sqrt{2}$

해결전략 | $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 꼴이 나타나도록 식을 변형한다.

(1) $$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=f'(2)\times\frac{1}{4}=4\times\frac{1}{4}=1$$

(2) $$\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-2f(2)+2f(2)-xf(2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2\{f(x)-f(2)\}+(2-x)f(2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{2}{x+2}\right\}-\lim_{x\to2}\frac{f(2)}{x+2}$$
$$=\frac{f'(2)}{2}-\frac{f(2)}{4}=\frac{9}{4}$$

(3) $$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times(\sqrt{x}+\sqrt{2})\right\}$$
$$=f'(2)\times2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$$

04-2 답 (1) 2 (2) 6 (3) −30

해결전략 | $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 꼴이 나타나도록 식을 변형한다.

(1) $\lim_{x\to2}\frac{f(x+1)-f(3)}{x^2-4}$에서 $x+1=t$라고 하면

$x\longrightarrow2$일 때, $t\longrightarrow3$이므로

$$\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{(t-1)^2-4}=\lim_{t\to3}\left\{\frac{f(t)-f(3)}{t-3}\times\frac{1}{t+1}\right\}$$
$$=f'(3)\times\frac{1}{4}=2$$

(2) $$\lim_{x\to3}\frac{f(x^2)-f(9)}{x-3}=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}\times(x+3)\right\}$$
$$=f'(9)\times6=6$$

(3) $$\lim_{x\to3}\frac{x^2f(9)-9f(x^2)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2f(9)-9f(9)+9f(9)-9f(x^2)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x^2-9)f(9)-9\{f(x^2)-f(9)\}}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x^2-9)f(9)}{x-3}-9\lim_{x\to3}\frac{f(x^2)-f(9)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(x+3)f(9)-9\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}\times(x+3)\right\}$$
$$=6f(9)-9\times f'(9)\times6=-30$$

04-3 답 21

해결전략 | $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 꼴이 나타나도록 식을 변형한다.

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^2+2)f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+2)\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$$
$$=3f'(1)=21$$

04-4 답 3

해결전략 | $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 꼴이 나타나도록 식을 변형한다.

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2+5x+4}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\left\{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\times\frac{1}{x+4}\right\}$$

$$=f'(-1)\times\frac{1}{3}=3$$

04-5 답 5

해결전략 | $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 꼴이 나타나도록 식을 변형한다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{f(x)-f(1)}+\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{f(x)-f(1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\frac{x-1}{f(x)-f(1)}\times(x+1)\right\}$$

$$+\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\frac{x-1}{f(x)-f(1)}\times(x^2+x+1)\right\}$$

$$=f'(1)\times\frac{1}{f'(1)}\times 2+f'(1)\times\frac{1}{f'(1)}\times 3=5$$

04-6 답 $\sqrt{3}$

해결전략 | 두 점 사이의 거리를 이용하여 $f(a)-f(1)$을 구하고 미분계수의 정의를 이용한다.

STEP 1 두 점 사이의 거리를 이용하여 식 정리하기

$a>1$이므로 $f(a)>f(1)$이고 두 점 $(1,\ f(1))$, $(a,\ f(a))$ 사이의 거리가 a^2-1이므로

$$\sqrt{(a-1)^2+\{f(a)-f(1)\}^2}=a^2-1$$

$$(a-1)^2+\{f(a)-f(1)\}^2=(a^2-1)^2$$

$$\{f(a)-f(1)\}^2=(a^2-1)^2-(a-1)^2$$

$$=(a-1)^2\{(a+1)^2-1\}$$

$$=(a-1)^2(a^2+2a)$$

$$\therefore f(a)-f(1)=(a-1)\sqrt{a^2+2a}$$

$(\because a>1$이고 $f(a)>f(1))$

STEP 2 $f'(1)$의 값 구하기

$$\therefore f'(1)=\lim_{a\to 1}\frac{f(a)-f(1)}{a-1}$$

$$=\lim_{a\to 1}\frac{(a-1)\sqrt{a^2+2}}{a-1}$$

$$=\lim_{a\to 1}\sqrt{a^2+2}=\sqrt{3}$$

발전유형 05 81쪽

05-1 답 −2

해결전략 | $f(0)$의 값을 구하고 미분계수의 정의를 이용한다.

STEP 1 $f(0)$의 값 구하기

$x=0,\ y=0$을 $f(x+y)=f(x)+f(y)+3$에 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+3$$

$$\therefore f(0)=-3$$

STEP 2 $f'(0)$의 값 구하기

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(-1)+f(h)+3\}-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)$$

이므로 $f'(0)=-2$

풍쌤의 비법

미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+k$ (k는 상수)일 때, $f(0)=-k$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)+f(h)+k\}-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+k}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=f'(0)$$

즉, 함수 $f'(x)$는 상수함수이므로 위의 문제에서 $f'(0)=f'(-1)=-2$이다.

05-2 답 4

해결전략 | $f(0)$의 값을 구하고 미분계수의 정의를 이용한다.

STEP 1 $f(0)$의 값 구하기

$x=0,\ y=0$을 $f(x+y)=f(x)+f(y)$에 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)\qquad\therefore f(0)=0$$

STEP 2 $f'(3)$의 값 구하기

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1)+f(h)\}-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$$

이므로 $f'(0)=4$

$$\therefore f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(3)+f(h)\}-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=f'(0)=4$$

05-3 답 4

해결전략 | $f(0)$의 값을 구하고 미분계수의 정의를 이용한다.

STEP 1 $f(0)$의 값 구하기

$x=0$, $y=0$을 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$ $\therefore f(0)=0$

STEP 2 $f'(0)$의 값 구하기

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1)+f(h)+h\}-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+1$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+1$$
$$=f'(0)+1$$

이므로 $f'(0)+1=3$ $\therefore f'(0)=2$

STEP 3 $f'(2)$의 값 구하기

$$\therefore f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2)+f(h)+2h\}-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+2$$
$$=f'(0)+2=4$$

05-4 답 8

해결전략 | $f(0)$의 값을 구하고 미분계수의 정의를 이용한다.

STEP 1 $f(0)$의 값 구하기

$x=0$, $y=0$을 $f(x+y)=2f(x)f(y)$에 대입하면

$f(0)=2f(0)f(0)$

$f(0)>0$이므로 $f(0)=\frac{1}{2}$

STEP 2 $f'(3)$의 값 구하기

$$f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2f(3)f(h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2f(3)\left\{f(h)-\frac{1}{2}\right\}}{h}$$
$$=2f(3)\times\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=2f(3)f'(0)$$

STEP 3 $\frac{f'(3)}{f(3)}$의 값 구하기

따라서 $f'(3)=2f(3)\times4$이므로

$\frac{f'(3)}{f(3)}=8$

05-5 답 11

해결전략 | $f(0)$의 값을 구하고 미분계수의 정의를 이용한다.

STEP 1 $f(0)$의 값 구하기

$x=0$, $y=0$을 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y)+2$에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0+2$ $\therefore f(0)=-2$

STEP 2 $f'(0)$의 값 구하기

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1)+f(h)+2h(1+h)+2\}-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(h)+2\}+2h(1+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}2(1+h)$$
$$=f'(0)+2$$

이므로 $f'(0)+2=5$ $\therefore f'(0)=3$

STEP 3 $f'(2)$의 값 구하기

$$\therefore f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2)+f(h)+4h(2+h)+2\}-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(h)+2\}+4h(2+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}4(2+h)$$
$$=f'(0)+8=11$$

05-6 답 28

해결전략 | $f(0)$의 값을 구하고 미분계수의 정의를 이용한다.

STEP 1 $f(0)$의 값 구하기

$x=0$, $y=0$을 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0-1$ $\therefore f(0)=1$

STEP 2 $f'(x)$ 구하기

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)+f(h)+2xh-1\}-f(x)}{h}$$
$$=2x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$
$$=2x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}$$
$$=2x+f'(0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

STEP 3 $f'(0)$의 값 구하기

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=14$에서 $x\longrightarrow 1$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

$\therefore f(1)=f'(1)$

㉠에서 $f'(1)=2+f'(0)$이므로

$f'(0)=f'(1)-2=f(1)-2$

따라서

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x-f'(0)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x-f(1)+2}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}-\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}-\lim_{x\to 1}\frac{2}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)-1=14$$

이므로 $f'(1)=30$

$\therefore f'(0)=f'(1)-2=30-2=28$

◉→ 다른 풀이

STEP 1 $f(0)$의 값 구하기

$x=0$, $y=0$을 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0-1$ $\therefore f(0)=1$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$f'(0)=k$ (k는 상수)라고 하면

$k=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)+f(h)+2xh-1\}-f(x)}{h}$$
$$=2x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$
$$=2x+k$$

$\therefore f(x)=\int(2x+k)dx=x^2+kx+C$ (C는 상수)

$f(0)=1$이므로 $C=1$

$\therefore f(x)=x^2+kx+1$

STEP 3 $f'(0)$의 값 구하기

따라서 $f'(x)=2x+k$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+kx+1)-(2x+k)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2+k(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1+k}{x+1}$$
$$=\frac{k}{2}=14$$

$\therefore k=28$

필수유형 06 83쪽

06-1 답 (1) 연속이지만 미분가능하지 않다.
(2) 연속이지만 미분가능하지 않다.

해결전략 | 연속성은 극한과 함숫값을 비교하고 미분가능성은 좌미분계수와 우미분계수를 비교한다.

(1) STEP 1 연속성 조사하기

$f(1)=0$이고 $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}x|x-1|=0$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

STEP 2 미분가능성 조사하기

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{-x(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}(-x)=-1$$
$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}x=1$$

따라서 $f'(1)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(2) STEP 1 연속성 조사하기

$f(1)=0$이고

$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\{(x-1)+|x-1|\}=0$이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

STEP 2 미분가능성 조사하기

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{0}{x-1}=0$

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$

따라서 $f'(1)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

06-2 ㄱ, ㄹ

해결전략 | 연속은 극한값과 함숫값을 비교하고 미분가능성은 좌미분계수와 우미분계수를 비교한다.

STEP 1 $x=0$에서의 함수 $f(x)=|x|$의 연속과 미분가능성 확인하기

ㄱ. $f(0)=0$이고 $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}|x|=0$이므로

$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x-0}{x}=-1$

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x-0}{x}=1$

따라서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, 즉 $f'(0)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

STEP 2 $x=0$에서의 함수 $f(x)=|x|^2$의 연속과 미분가능성 확인하기

ㄴ. $f(x)=|x|^2=x^2$이므로 $f(0)=0$, $\lim_{x\to0} f(x)=0$

즉, $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to0-} x=0$

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to0+} x=0$

따라서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, 즉 $f'(0)$의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

STEP 3 $x=0$에서의 함수 $f(x)=1+\frac{2}{x}$의 연속과 미분가능성 확인하기

ㄷ. $x=0$에서 함숫값이 존재하지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

STEP 4 $x=0$에서의 함수 $f(x)$의 연속과 미분가능성 확인하기

ㄹ. $f(0)=1$이고

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}(3x+1)=1$,

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}(x+1)^2=1$

이므로 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{(3x+1)-1}{x}=3$

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(x+1)^2-1}{x}$

$=\lim_{x\to0+}(x+2)=2$

따라서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, 즉 $f'(0)$의 값이 존재하지 않으므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

그러므로 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ, ㄹ이다.

06-3 6

해결전략 | 그래프에서 불연속인 점과 뾰족점을 찾는다.

STEP 1 불연속인 점 구하기

불연속인 점은 $x=-1$, $x=2$의 2개이므로 $m=2$

STEP 2 미분가능하지 않은 점 구하기

미분가능하지 않은 점은 $x=-3$, $x=-1$, $x=2$, $x=4$의 4개이므로 $n=4$

STEP 3 $m+n$의 값 구하기

$\therefore m+n=2+4=6$

06-4 ③

해결전략 | $f'(a)$의 값이 존재하지 않는 $x=a$에서 미분가능하지 않고, $f'(a)$는 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

① $x=3$에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $f'(3)>0$이다. (참)

② $\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0+} f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to0} f(x)$의 값이 존재한다. (참)

③ $f'(x)=0$인 점은 미분가능하면서 접선의 기울기가 0인 점이므로 $x=-1$일 때의 1개이다. (거짓)

④ 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개이다. (참)

⑤ 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 점은 3개이다. (참)

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

06-5 답 3

해결전략 | 그래프에서 불연속인 점과 뾰족점을 찾는다.

STEP 1 집합 A 구하기

$\lim_{x\to k} f(x)=f(k)$를 만족시키면 $x=k$에서 연속이고

$x=-2$, $x=0$, $x=2$, $x=3$, $x=4$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로

$A=\{-2, 0, 2, 3, 4\}$

STEP 2 집합 B 구하기

$\lim_{x\to k}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$의 값이 존재하면 $x=k$에서 미분가능 ← 불연속점, 뾰족점이 없어.

하고 $x=0$, $x=4$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하므로

$B=\{0, 4\}$

STEP 3 집합 $A-B$의 원소의 개수 구하기

따라서 $A-B=\{-2, 2, 3\}$이므로 $n(A-B)=3$

풍쌤의 비법

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)=k$가 성립한다는 것은 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속임을 의미한다.

① 함숫값의 존재: $k=f(a)$이므로 함숫값이 존재함을 의미한다.

② 극한값의 존재: $\lim_{x\to a} f(x)=k$이므로 극한값이 존재함을 의미한다.

③ 함숫값과 극한값의 비교:

(극한값)$=\lim_{x\to a} f(x)=f(a)=$(함숫값)

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

필수유형 07 85쪽

07-1 답 (1) 0 (2) $2x-3$ (3) $6x^2-x$ (4) x^3+2x^2+2x-3

해결전략 | 미분법의 공식을 이용하여 미분한다.

(1) 5^2은 상수이므로 $y'=0$

(2) $y'=(x^2-3x+2)'=2x-3$

(3) $y'=\left(2x^3-\frac{1}{2}x^2+5\right)'=6x^2-x$

(4) $y'=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+x^2-3x\right)'=x^3+2x^2+2x-3$

07-2 답 4

해결전략 | 미분법의 공식을 이용하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 후 $f'(1)=10$을 대입하여 a의 값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f'(x)=6x^2+a$

STEP 2 a의 값 구하기

$f'(1)=6+a=10$ $\therefore a=4$

07-3 답 6

해결전략 | 미분법의 공식을 이용하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 후 주어진 조건을 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f'(x)=2ax+b$

STEP 2 a, b, c의 값 구하기

$f'(0)=b=-3$

$f'(1)=2a+b=1$에서 $2a-3=1$

$\therefore a=2$

$f(1)=a+b+c=0$에서 $2-3+c=0$

$\therefore c=1$

STEP 3 $a-b+c$의 값 구하기

$\therefore a-b+c=2-(-3)+1=6$

07-4 답 5

해결전략 | 미분법의 공식을 이용하여 미분하여 $f'(x)$를 구하고, 수가 나열된 규칙을 찾아 $f(1)$, $f'(1)$을 계산한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f'(x)=0-1+2x-3x^2+\cdots+10x^9$

STEP 2 $\frac{f'(1)}{f(1)}$의 값 구하기

$f(1)=1-1+1-1+\cdots+1$

$=\underbrace{(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)}_{5\text{개}}+1$

$=0\times 5+1=1$

$f'(1)=-1+2-3+\cdots+10=5$

$=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-9+10)$

$=\underbrace{1+1+1+1+1}_{5\text{개}}$

$=1\times 5=5$

$\therefore \frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{5}{1}=5$

07-5 답 128

해결전략 | 미분법의 공식을 이용하여 $f'(x)$를 구하고, 수가 나열된 규칙을 찾아 $f'(-1)$, $f'(1)$을 계산한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f'(x)=0+1+2x+3x^2+\cdots+15x^{14}$

STEP 2 $f'(-1)$의 값 구하기

$f'(-1)=1-2+3-4+\cdots+15$

$=(1-2)+(3-4)+\cdots+(13-14)+15$

$=\underbrace{-1+(-1)+\cdots+(-1)}_{7개}+15$

$=(-1)\times7+15=8$

STEP 3 $f'(1)$의 값 구하기

$f'(1)=1+2+3+4+\cdots+15=120$

STEP 4 $f'(-1)+f'(1)$의 값 구하기

$\therefore f'(-1)+f'(1)=8+120=128$

◉→ 다른 풀이

STEP 3 $f'(1)$의 값 구하기

$f'(1)=1+2+3+4+\cdots+15$

$=\dfrac{15\times16}{2}=120$

풍쌤의 비법

수열의 합 $\sum$

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

07-6 답 11

해결전략 | 주어진 조건을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한 후 미분법의 공식을 이용하여 미분한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$f(1)=f(2)=f(3)=3$이므로

$f(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)+3$ ($k\neq0$인 상수)으로 놓으면

$f(0)=k\times(-1)\times(-2)\times(-3)+3=-3$

$\therefore k=1$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+3$

$=x^3-6x^2+11x-3$

STEP 2 $f'(4)$의 값 구하기

$f'(x)=3x^2-12x+11$이므로

$f'(4)=48-48+11=11$

풍쌤의 비법

(1) 최고차항의 계수가 k인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=f(b)=f(c)=0$이면 $f(x)=k(x-a)(x-b)(x-c)$로 놓을 수 있다.

(2) 최고차항의 계수가 k인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=f(b)=f(c)=m$이면 $f(x)=k(x-a)(x-b)(x-c)+m$으로 놓을 수 있다.

필수유형 08 87쪽

08-1 답 (1) $4x+3$ (2) $-6x^2+8x$ (3) $4x^3+6x^2-6x+4$ (4) $3x^2-4x-5$

해결전략 | 곱의 미분법을 이용하여 주어진 함수를 미분한다.

(1) $y'=x'(2x+3)+x(2x+3)'$

$=(2x+3)+x\times2$

$=4x+3$

(2) $y'=(x^2)'(-2x+4)+x^2(-2x+4)'$

$=2x(-2x+4)+x^2\times(-2)$

$=-4x^2+8x-2x^2$

$=-6x^2+8x$

(3) $y'=(x^2-2)'(x^2+2x-1)+(x^2-2)(x^2+2x-1)'$

$=2x(x^2+2x-1)+(x^2-2)(2x+2)$

$=2x^3+4x^2-2x+2x^3+2x^2-4x+4$

$=4x^3+6x^2-6x+4$

(4) $y'=(x+2)'(x-1)(x-3)$

$+(x+2)(x-1)'(x-3)$

$+(x+2)(x-1)(x-3)'$

$=(x-1)(x-3)+(x+2)(x-3)$

$+(x+2)(x-1)$

$=x^2-4x+3+x^2-x-6+x^2+x-2$

$=3x^2-4x-5$

08-2 답 -4

해결전략 | 곱의 미분법을 이용하여 주어진 함수를 미분한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f'(x)=(x^3+3)'(x^2-1)+(x^3+3)(x^2-1)'$

$=3x^2(x^2-1)+(x^3+3)\times2x$

STEP 2 $f'(-1)$의 값 구하기

$\therefore f'(-1)=0+(-4)=-4$

08-3 답 51

해결전략 | $y=\{f(x)\}^n$ 꼴의 곱의 미분법을 이용하여 주어진 함수를 미분한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f'(x)=3(2x+a)^2(2x+a)'$

$=6(2x+a)^2$

STEP 2 a의 값 구하기

$f'(1)=6$이므로

$6(2+a)^2=6,\ (2+a)^2=1$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=-1$ ····· ㉠

또, $f'(2)=6$이므로

$6(4+a)^2=6,\ (4+a)^2=1$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=-3$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-3$

STEP 3 $a+f'(0)$의 값 구하기

따라서 $f'(x)=6(2x-3)^2$이므로 $f'(0)=54$

$\therefore a+f'(0)=-3+54=51$

08-4 답 −3

해결전략 | 곱의 미분법을 이용하여 주어진 함수를 미분한다.

STEP 1 $g'(x)$ 구하기

$g'(x)=(x^2-2x)'f(x)+(x^2-2x)f'(x)$

$=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$

STEP 2 $g'(1)$의 값 구하기

$\therefore g'(1)=0-f'(1)=-3$

08-5 답 −1

해결전략 | 곡선 위의 한 점에서의 접선의 기울기는 미분계수를 의미하므로 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구한다.

STEP 1 $g'(x)$ 구하기

$g'(x)=(x^2)'f(x)+x^2f'(x)$

$=2xf(x)+x^2f'(x)$

STEP 2 a의 값 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 a이므로

$f(3)=2,\ f'(3)=a$

따라서 $g'(3)=6f(3)+9f'(3)=12+9a=3$

$\therefore a=-1$

08-6 답 5

해결전략 | 함수 $f(x)$를 조건에 맞게 구성한 후 곱의 미분법을 이용하여 미분한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

조건 (가)에서 $f(a)=f(2)=f(6)=k$ (k는 상수)라고 하면 $f(x)=(x-a)(x-2)(x-6)+k$로 놓을 수 있다.

$\therefore f'(x)=(x-2)(x-6)+(x-a)(x-6)$

$+(x-a)(x-2)$

STEP 2 $f'(a)$의 값 구하기

조건 (나)에서 $f'(2)=-4$이므로

$f'(2)=0+(2-a)\times(-4)+0=-4$

$-4(2-a)=-4$ $\therefore a=1$

$\therefore f'(a)=(a-2)(a-6)+0+0=(-1)\times(-5)=5$

필수유형 09 89쪽

09-1 답 (1) 9 (2) 2

해결전략 | 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 극한식을 변형한다.

(1) STEP 1 극한식 변형하기

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$$

$$=2\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$=2f'(1)+f'(1)=3f'(1)$

STEP 2 극한값 구하기

$f'(x)=3x^2-4x+4$이므로

$f'(1)=3-4+4=3$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}=3\times3=9$$

(2) STEP 1 극한식 변형하기

$$\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2\{f(x)-f(2)\}+(2-x)f(2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{2}{x+2}\right\}-\lim_{x\to2}\frac{f(2)}{x+2}$$

$$=\frac{f'(2)}{2}-\frac{f(2)}{4}$$

STEP 2 극한값 구하기

이때 $f(2)=8-8+8=8$이고

$f'(x)=3x^2-4x+4$이므로

$f'(2)=12-8+4=8$

$\therefore \lim_{x\to 2}\dfrac{2f(x)-xf(2)}{x^2-4}=8\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{8}{4}=4-2=2$

09-2 답 135

해결전략 | 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 극한식을 변형하고 곱의 미분법을 이용하여 함수를 미분한다.

STEP 1 극한식 변형하기

$\lim_{x\to 3}\dfrac{3f(x)-xf(3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{3\{f(x)-f(3)\}-(x-3)f(3)}{x-3}$

$=3\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}-\lim_{x\to 3}f(3)$

$=3f'(3)-f(3)$

STEP 2 극한값 구하기

이때 $f(3)=3^3=27$이고

$f'(x)=3(2x-3)^2(2x-3)'=6(2x-3)^2$이므로

$f'(3)=6\times 3^2=54$

$\therefore$ (주어진 식)$=3\times 54-27=135$

09-3 답 10

해결전략 | 미분계수의 정의를 이용하여 극한식을 $f'(1)$, $g'(1)$이 포함된 식으로 변형한다.

STEP 1 극한식 변형하기

$f(1)=1+1+1=3$, $g(1)=1+1+1=3$이므로

$f(1)=g(1)$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-g(1-h)}{3h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)+g(1)-g(1-h)}{3h}$

$=\dfrac{2}{3}\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{2h}+\dfrac{1}{3}\lim_{h\to 0}\dfrac{g(1-h)-g(1)}{-h}$

$=\dfrac{2}{3}f'(1)+\dfrac{1}{3}g'(1)$

STEP 2 극한값 구하기

$f'(x)=5x^4+3x^2+1$이므로

$f'(1)=5+3+1=9$

$g'(x)=6x^5+4x^3+2x$이므로

$g'(1)=6+4+2=12$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{2}{3}\times 9+\dfrac{1}{3}\times 12=10$

09-4 답 13

해결전략 | 미분계수의 정의를 이용하여 곱의 미분법을 정리한다.

STEP 1 극한식 변형하기

$\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)g(x)-f(1)g(x)+f(1)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\times g(x)\right\}$

$\quad+\lim_{x\to 1}\left\{f(1)\times\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}$

$=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

STEP 2 극한값 구하기

이때 $g(1)=4$이고 $g'(x)=2x+3$이므로

$g'(1)=5$

$\therefore \lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}=2\times 4+1\times 5=13$

09-5 답 −6

해결전략 | 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=c$ (c는 상수)이면 $f(a)=b$, $f'(a)=c$임을 이용한다.

STEP 1 함숫값과 미분계수 구하기

$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=3$이므로

$f(2)=2$, $f'(2)=3$

$\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)-4}{x-2}=a$이므로

$g(2)=4$, $g'(2)=a$

STEP 2 a의 값 구하기

함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

$\quad=12+2a=0$

$\therefore a=-6$

09-6 답 −30

해결전략 | $\dfrac{1}{n}=h$라 하고 식을 변형하여 미분계수의 정의로 바꾼다.

STEP 1 극한식 변형하기

$\dfrac{1}{n}=h$라고 하면 $n\longrightarrow\infty$일 때, $h\longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(-1+\dfrac{1}{n}\right)-f\left(-1-\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\{f(-1+h)-f(-1-h)\}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$+ \lim_{h\to 0+} \frac{f(-1-h)-f(-1)}{-h}$$

$$= f'(-1)+f'(-1) = 2f'(-1)$$

STEP 2 극한값 구하기

$f'(x) = (4x-3)(x^2-x-2)+(2x^2-3x)(2x-1)$

이므로 $f'(-1) = 0+(-15) = -15$

$\therefore$ (주어진 식) $= 2\times(-15) = -30$

필수유형 10 91쪽

10-1 답 (1) 7 (2) -13 (3) 20

해결전략 | 함수를 적절하게 치환하여 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

(1) STEP 1 $f(x)$ 정하기

$f(x) = x^{10}-3x$로 놓으면

$f(1) = 1-3 = -2$

$f'(x) = 10x^9-3$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore \lim_{x\to 1} \frac{x^{10}-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

$$= 10-3 = 7$$

(2) STEP 1 $f(x)$ 정하기

$f(x) = x^{12}-x^8+2x^6+x^3$으로 놓으면

$f(-1) = 1-1+2-1 = 1$

$f'(x) = 12x^{11}-8x^7+12x^5+3x^2$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore \lim_{x\to -1} \frac{x^{12}-x^8+2x^6+x^3-1}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1)$$

$$= -12+8-12+3 = -13$$

(3) STEP 1 $f(x)$ 정하기

$f(x) = x^5-5x^3$으로 놓으면

$f(2) = 32-40 = -8$

$f'(x) = 5x^4-15x^2$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{x^5-5x^3+8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$$

$$= 80-60 = 20$$

10-2 답 (1) 2 (2) 15 (3) 9

해결전략 | 함수를 적절하게 치환하여 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

(1) STEP 1 $f(x)$ 정하기

$f(x) = x^n+4x$로 놓으면

$f(1) = 1+4 = 5$

$$\therefore \lim_{x\to 1} \frac{x^n+4x-5}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= f'(1) = 6$$

STEP 2 n의 값 구하기

이때 $f'(x) = nx^{n-1}+4$이므로

$f'(1) = n+4$

즉, $n+4 = 6$이므로

$n = 2$

(2) STEP 1 $f(x)$ 정하기

$f(x) = x^n-6x^2+x$로 놓으면

$f(1) = 1-6+1 = -4$

$$\therefore \lim_{x\to 1} \frac{x^n-6x^2+x+4}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= f'(1)$$

STEP 2 n의 값 구하기

이때 $f'(x) = nx^{n-1}-12x+1$이므로

$f'(1) = n-12+1 = n-11$

즉, $n-11 = 4$이므로

$n = 15$

(3) STEP 1 $f(x)$ 정하기

$f(x) = x^n+3x^4+x^3-1$로 놓으면

$$f(-1) = \begin{cases} 2 & (n\text{이 짝수}) \\ 0 & (n\text{이 홀수}) \end{cases}$$

$\lim_{x\to -1} \frac{x^n+3x^4+x^3-1}{x+1} = 0$에서 $x \longrightarrow -1$일 때,

(분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to -1}(x^n+3x^4+x^3-1) = 0$이어야 하므로 n은 홀수이다.

$$\therefore \lim_{x\to -1} \frac{x^n+3x^4+x^3-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$$= f'(-1)$$

STEP 2 n의 값 구하기

이때 $f'(x) = nx^{n-1}+12x^3+3x^2$이므로

$f'(-1) = n-12+3 = n-9$

즉, $n-9 = 0$이므로

$n = 9$

10-3 답 -28

해결전략 | 함수를 적절하게 치환하여 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

STEP 1 $f(x)$ 정하기

$f(x)=x^{10}+x^8+x^6+x^4$으로 놓으면

$f(-1)=1+1+1+1=4$

$f'(x)=10x^9+8x^7+6x^5+4x^3$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{x^{10}+x^8+x^6+x^4-4}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=f'(-1)$$
$$=-10-8-6-4=-28$$

10-4 답 6

해결전략 | 함수를 적절하게 치환하여 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

STEP 1 $f(x)$ 정하기

$f(x)=x^{10}-x^7+x^4-x$로 놓으면

$f(1)=1-1+1-1=0$

$f'(x)=10x^9-7x^6+4x^3-1$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-x^7+x^4-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)$$
$$=10-7+4-1=6$$

10-5 답 11

해결전략 | (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow 0$임을 이용하여 k의 값을 구한 후 함수를 적절하게 치환하여 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 변형한다.

STEP 1 k의 값 구하기

$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-kx+7}{x-1}=-5$에서 $x\longrightarrow 1$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}(x^n-kx+7)=0$이어야 하므로

$1-k+7=0 \quad \therefore k=8$

STEP 2 n의 값 구하기

$f(x)=x^n-8x$로 놓으면

$f(1)=1-8=-7$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^n-8x+7}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)=-5$$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}-8$이므로

$f'(1)=n-8$

즉, $n-8=-5$이므로 $n=3$

STEP 3 $n+k$의 값 구하기

$\therefore n+k=3+8=11$

10-6 답 16

해결전략 | (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow 0$임을 이용하여 n의 값을 구한 후 함수를 적절하게 치환하여 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

STEP 1 n의 값 구하기

$\lim_{x\to 2}\frac{x^n-4x^2-4x+8}{x-2}=k$에서 $x\longrightarrow 2$일 때,

(분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}(x^n-4x^2-4x+8)=0$이므로

$2^n-16-8+8=0$, $2^n=16 \quad \therefore n=4$

STEP 2 k의 값 구하기

$f(x)=x^4-4x^2-4x$로 놓으면

$f(2)=16-16-8=-8$

$f'(x)=4x^3-8x-4$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-4x^2-4x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=f'(2)$$
$$=32-16-4=12$$

$\therefore k=12$

STEP 3 $n+k$의 값 구하기

$\therefore n+k=4+12=16$

필수유형 11 93쪽

11-1 답 6

해결전략 | 미분가능성과 연속성의 관계를 이용한다.

STEP 1 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속임을 이용하여 관계식 구하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(2x^2+ax+b)=8+2a+b$,

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(3ax-6)=6a-6$

에서 $8+2a+b=6a-6$

$\therefore b=4a-14$ ····· ㉠

STEP 2 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능함을 이용하여 관계식 구하기

$f'(x)=\begin{cases}4x+a & (x<2)\\ 3a & (x>2)\end{cases}$이고 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 2-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2-}(4x+a)=8+a$,

$\lim\limits_{x\to 2+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2+} 3a=3a$

에서 $8+a=3a$

$\therefore a=4$

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

이것을 ㉠에 대입하면 $b=16-14=2$

$\therefore a+b=4+2=6$

◉→ 다른 풀이

STEP 2 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능함을 이용하여 a의 값 구하기

$f'(2)$가 존재하므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(2x^2+ax+b)-(6a-6)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-}\frac{2x^2+ax+b-6a+6}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-}\frac{2x^2+ax-2a-8}{x-2}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{x\to 2-}\frac{(x-2)(2x+a+4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-}(2x+a+4)$$

$$=a+8$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(3ax-6)-(6a-6)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{3ax-6a}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}3a=3a$$

따라서 $a+8=3a$이므로 $a=4$

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

이것을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a+b=4+2=6$

11-2 답 17

해결전략 | 미분가능성과 연속성의 관계를 이용한다.

STEP 1 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속임을 이용하여 관계식 구하기

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로 $x=-1$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=f(-1)$이므로

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-}(ax^2+8)=a+8$,

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)\ \lim\limits_{x\to -1+}(x^3+bx+5a)=-1-b+5a$

에서 $a+8=-1-b+5a$

$\therefore b=4a-9$ …… ㉠

STEP 2 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능함을 이용하여 관계식 구하기

도함수가 $f'(x)=\begin{cases}2ax & (x<-1)\\ 3x^2+b & (x>-1)\end{cases}$이고 $x=-1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to -1-} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1-} 2ax=-2a$,

$\lim\limits_{x\to -1+} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1+}(3x^2+b)=3+b$

에서 $-2a=3+b$ …… ㉡

STEP 3 $f(x)$ 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-5$

$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2+8 & (x<-1)\\ x^3-5x+5 & (x\geq -1)\end{cases}$

STEP 4 $f(3)$의 값 구하기

$\therefore f(3)=27-15+5=17$

11-3 답 −6

해결전략 | $x=-1$, $x=1$에서 연속이고 미분가능함을 이용한다.

STEP 1 $x=-1$, $x=1$에서 연속임을 이용하여 관계식 구하기

함수 $f(x)$가 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 미분가능해야 하므로 $x=1$ 또는 $x=-1$에서 연속이어야 한다.

$x=-1$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=f(-1)$이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-}(-3x+a)=3+a$,

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+}(x^3+bx^2+cx)=-1+b-c$

에서 $3+a=-1+b-c$

$\therefore a-b+c=-4$ …… ㉠

$x=1$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(x^3+bx^2+cx)=1+b+c$,

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(-3x+d)=-3+d$

에서 $1+b+c=-3+d$

$\therefore b+c-d=-4$ …… ㉡

STEP 2 $x=-1$, $x=1$에서 미분가능함을 이용하여 관계식 구하기

$$f'(x)=\begin{cases}-3 & (x<-1)\\ 3x^2+2bx+c & (-1<x<1)\\ -3 & (x>1)\end{cases}$$이고 $x=-1$,

$x=1$에서 미분가능해야 한다.

$x=-1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to -1-} f'(x)=-3$,

$\lim_{x\to -1+} f'(x)=\lim_{x\to -1+}(3x^2+2bx+c)=3-2b+c$

에서 $-3=3-2b+c$

$\therefore 2b-c=6$ …… ㉢

$x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 1-} f'(x)=\lim_{x\to 1-}(3x^2+2bx+c)=3+2b+c$

$\lim_{x\to 1+} f'(x)=-3$

에서 $3+2b+c=-3$

$\therefore 2b+c=-6$ …… ㉣

STEP 3 $a+b+c+d$의 값 구하기

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $b=0$, $c=-6$

이것을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$a-6=-4$, $-6-d=4$이므로

$a=2$, $d=-2$

$\therefore a+b+c+d=2+0+(-6)+(-2)=-6$

11-4 답 124

해결전략 | 미분가능성과 연속성의 관계를 이용한다.

STEP 1 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속임을 이용하여 관계식 구하기

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로 $x=a$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$이므로

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a-}(x^2+3)=a^2+3$,

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+}(x^3-x+b)=a^3-a+b$

에서 $a^2+3=a^3-a+b$

$\therefore a^3-a^2-a+b-3=0$ …… ㉠

STEP 2 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능함을 이용하여 관계식 구하기

$f'(x)=\begin{cases}2x & (x<a)\\ 3x^2-1 & (x>a)\end{cases}$이고 $x=a$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to a-} f'(x)=\lim_{x\to a-} 2x=2a$,

$\lim_{x\to a+} f'(x)=\lim_{x\to a+}(3x^2-1)=3a^2-1$

에서 $2a=3a^2-1$, $3a^2-2a-1=0$

$(3a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a$는 정수)

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b-4=0$이므로 $b=4$

STEP 3 $f(a+b)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2+3 & (x<1)\\ x^3-x+4 & (x\geq 1)\end{cases}$이므로

$f(a+b)=f(5)=125-5+4=124$

11-5 답 0

해결전략 | 연속성과 미분가능성의 관계를 이용한다.

STEP 1 함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속임을 이용하여 관계식 구하기

함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)g(x)=f(2)g(2)$이므로

$\lim_{x\to 2-} f(x)g(x)=(4+2a+b)\times(-2)$,

$\lim_{x\to 2+} f(x)g(x)=(4+2a+b)\times 2$

에서 $-2(4+2a+b)=2(4+2a+b)$

$4+2a+b=0$ $\therefore b=-2a-4$ …… ㉠

STEP 2 함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 미분가능함을 이용하여 a의 값 구하기

$f(2)g(2)=2(4+2a+b)=0$ ($\because$ ㉠)

함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-}\frac{-x^3-ax^2-bx}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-}\frac{-x\{x^2+ax-(2a+4)\}}{x-2}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{x\to 2-}\frac{-x(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-}\{-x(x+a+2)\}=-8-2a$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{x^3+ax^2+bx}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{x\{x^2+ax-(2a+4)\}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{x(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}x(x+a+2)=8+2a$$

에서 $-8-2a=8+2a$ $\therefore a=-4$

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

이것을 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore a+b=-4+4=0$

11-6 답 13

해결전략 | $g'(x)$를 구하고 $x=k$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to k-} g(x)=\lim_{x\to k+} g(x)=g(k)$, $\lim_{x\to k-} g'(x)=\lim_{x\to k+} g'(x)$

이어야 함을 이용한다.

STEP 1 $x=k$에서 함수 $g(x)$가 연속임을 확인하기

$\lim_{x\to k-} g(x)=\lim_{x\to k-} f(2x-k)=f(k)$,

$\lim_{x\to k+} g(x)=\lim_{x\to k+} f(x)=f(k)$이므로

함수 $g(x)$는 $x=k$에서 연속이다.

STEP 2 $g'(x)$ 구하기

$$\begin{aligned} f(2x-k)&=(2x-k)^2+3(2x-k)-5\\ &=4x^2-4kx+k^2+6x-3k-5\\ &=4x^2+(6-4k)x+k^2-3k-5 \end{aligned}$$

이므로

$$g(x)=\begin{cases} 4x^2+(6-4k)x+(k^2-3k-5) & (x<k)\\ x^2+3x-5 & (x\geq k) \end{cases}$$

$$\therefore g'(x)=\begin{cases} 8x+(6-4k) & (x<k)\\ 2x+3 & (x>k) \end{cases}$$

STEP 3 k의 값 구하기

$\lim_{x\to k-} g'(x)=\lim_{x\to k+} g'(x)$일 때, $x=k$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to k-} g'(x)=\lim_{x\to k-} \{8x+(6-4k)\}=4k+6$,

$\lim_{x\to k+} g'(x)=\lim_{x\to k+} (2x+3)=2k+3$

에서 $4k+6=2k+3$ $\therefore k=-\frac{3}{2}$

STEP 3 p^2+q^2의 값 구하기

따라서 $p=2$, $q=3$이므로 $p^2+q^2=2^2+3^2=13$

필수유형 12 95쪽

12-1 답 181

해결전략 | (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하면 (분자) $\longrightarrow 0$이 됨과 미분계수의 정의를 이용하여 미지수의 값을 구한다.

STEP 1 a, b의 관계식 구하기

$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-4}{h}=3$에서 $h\longrightarrow 0$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to 0} \{f(2+h)-4\}=0$이므로 $f(2)=4$

$f(2)=12+2a+b=4$이므로

$b=-2a-8$ ····· ㉠

STEP 2 a의 값 구하기

$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=3$

$f'(x)=6x+a$이므로

$f'(2)=12+a=3$ $\therefore a=-9$

STEP 3 a^2+b^2의 값 구하기

이것을 ㉠에 대입하면 $b=10$

$\therefore a^2+b^2=(-9)^2+10^2=181$

12-2 답 5

해결전략 | 미분계수의 정의를 이용하여 미지수의 값을 구한다.

STEP 1 미분계수 구하기

$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}=3$이므로 $f'(1)=3$

$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=-16$이므로 $f'(-1)=-16$

STEP 2 a, b의 값 구하기

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(1)=3+2a+b=3$에서

$2a+b=0$ ····· ㉠

$f'(-1)=3-2a+b=-16$에서

$-2a+b=-19$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{19}{4}$, $b=-\frac{19}{2}$

STEP 3 $f(2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^3+\frac{19}{4}x^2-\frac{19}{2}x-3$이므로

$f(2)=8+19-19-3=5$

12-3 답 18

해결전략 | 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 극한식을 변형한다.

STEP 1 a, b의 관계식 구하기

$f(-1)=-1+a+b=8$이므로

$a+b=9$ ····· ㉠

STEP 2 극한식 변형하기

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to -1} \frac{f(x)+xf(-1)}{x+1}\\ &=\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)+f(-1)+xf(-1)}{x+1}\\ &=\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}+\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)f(-1)}{x+1} \end{aligned}$$

$=f'(-1)+f(-1)$

$=f'(-1)+8=5$

$\therefore f'(-1)=-3$

STEP 3 ab의 값 하기

$f'(x)=3x^2+2ax$이므로

$f'(-1)=3-2a$

즉, $3-2a=-3$이므로 $a=3$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=6$

$\therefore ab=3\times6=18$

12-4 답 -2

해결전략 | 극한값이 존재하는 조건을 이용하여 $f(2)$의 값을 구하고, $x+1=t$라 하고 미분계수의 정의를 이용하여 극한식을 변형한다.

STEP 1 a, b의 관계식 구하기

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x+1)-4}{x^2-1}=\dfrac{5}{2}$에서 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{f(x+1)-4\}=0$이므로 $f(2)=4$

$f(2)=4+2a+b=4$이므로

$b=-2a$ …… ㉠

STEP 2 $x+1=t$라 하고 극한식 변형하기

$x+1=t$라고 하면 $x\longrightarrow1$일 때, $t\longrightarrow2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x+1)-4}{x^2-1}=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-f(2)}{(t-1)^2-1}$$
$$=\lim_{t\to2}\left\{\frac{f(t)-f(2)}{t-2}\times\frac{1}{t}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}f'(2)=\frac{5}{2}$$

STEP 3 a, b의 값 구하기

즉, $f'(2)=5$이고 $f'(x)=2x+a$이므로

$4+a=5$ $\therefore a=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

STEP 4 $f(-1)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^2+x-2$이므로

$f(-1)=1-1-2=-2$

12-5 답 -4

해결전략 | 주어진 조건에서 $f(x)$의 인수를 찾아 $f(x)$를 구성하고 주어진 두 극한식에 대입하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-1$에서 $x\longrightarrow1$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$ …… ㉠

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=4$에서 $x\longrightarrow2$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 삼차함수 $f(x)$는 $(x-1)(x-2)$를 인수로 가져야 하므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$ ($a\neq0$, a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

STEP 2 a, b의 관계식 구하기

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x-2)(ax+b)$$
$$=-a-b=-1 \quad \cdots\cdots ㉢$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x-1)(ax+b)$$
$$=2a+b=4 \quad \cdots\cdots ㉣$$

STEP 3 $f(0)$의 값 구하기

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(3x-2)$이므로

$f(0)=(-1)\times(-2)\times(-2)=-4$

12-6 답 -8

해결전략 | 극한값이 존재하기 위한 함숫값과 미분계수의 값을 이용하여 함수를 구한다.

STEP 1 a, b의 값 하기

조건 (가)에서 $x\longrightarrow\infty$일 때 $a\neq0$이면 극한값이 발산하므로 $a=0$

즉, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{bx^2+cx+d}{x^2-2x+3}=2$이므로 $b=2$

따라서 $f(x)=2x^2+cx+d$이므로 $f'(x)=4x+c$

STEP 2 c, d의 값 구하기

조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=10$이므로 $f(2)=0$

$\therefore f(2)=8+2c+d=0$ …… ㉠

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=10$$

즉, $f'(2)=8+c=10$이므로 $c=2$

㉠에 $c=2$를 대입하면 $d=-12$

$\therefore a+b+c+d=0+2+2+(-12)=-8$

필수유형 13 97쪽

13-1 답 1

해결전략 | 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 m이면 $f(a)=b$, $f'(a)=m$임을 이용한다.

STEP 1 a, b의 관계식 구하기

함수 $f(x)=x^3+2x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$f(1)=1+2+a+b=2$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉠

STEP 2 a, b의 값 구하기

점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 6이므로

$f'(1)=6$

$f'(x)=3x^2+4x+a$이므로

$f'(1)=3+4+a=6$ $\therefore a=-1$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=0$

STEP 3 a^2+b^2의 값 구하기

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+0^2=1$

13-2 답 −4

해결전략 | 그래프 위의 한 점에서의 접선의 기울기는 미분계수를 의미한다.

STEP 1 a의 값 구하기

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$f(1)=1+a+4=2$ $\therefore a=-3$

STEP 2 m의 값 구하기

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 m이므로

$f'(1)=m$

$f'(x)=2x-3$이므로

$f'(1)=2-3=m$ $\therefore m=-1$

STEP 3 $a+m$의 값 구하기

$\therefore a+m=-3+(-1)=-4$

13-3 답 $a=5$, $b=11$

해결전략 | 접선의 기울기는 $f'(a)$이고 $b=f(a)$이다.

STEP 1 a의 값 구하기

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 (a, b)에서 접선의 기울기가 6이므로

$f'(a)=6$

$f'(x)=2x-4$이므로

$f'(a)=2a-4=6$ $\therefore a=5$

STEP 2 b의 값 구하기

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(5, b)$를 지나므로

$b=f(5)=25-20+6=11$

13-4 답 28

해결전략 | 곡선이 지나는 점과 이 점에서의 접선의 기울기를 이용하여 $f(2)$, $f'(2)$의 값을 구하고, 곱의 미분법을 이용하여 $g'(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(2)$의 값 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 1)$에서 접선의 기울기가 2이므로

$f(2)=1$, $f'(2)=2$

STEP 2 $g'(2)$의 값 구하기

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$이므로

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)$

$=12\times1+8\times2=28$

13-5 답 −4

해결전략 | 접선의 기울기의 의미와 곱의 미분법을 이용하여 미지수를 구한다.

STEP 1 $x=1$에서 함숫값, 미분계수 구하기

$f'(x)=4(2x+a)$이므로

$f(1)=a^2+4a+4$, $f'(1)=8+4a$

STEP 2 a의 값 구하기

곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 -4이고 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=-4$

따라서 $(8+4a)+(a^2+4a+4)=-4$이므로

$a^2+8a+16=0$, $(a+4)^2=0$

$\therefore a=-4$

13-6 답 −1

해결전략 | 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로 접선의 기울기가 최대인 점의 x의 값에서 $f'(x)$도 최댓값을 갖는다.

STEP 1 a의 값 구하기

조건 ㈎에서 $x\longrightarrow1$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-3$$

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$이고 조건 ㈏에서 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기가 최대이므로 최댓값을 k라고 하면

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$=-3(x-2)^2+k$

$=-3x^2+12x+k-12$

따라서 $2a=12$이므로 $a=6$

STEP 2 b, c의 값 구하기

$f(1)=-1+6+b+c=0$이므로

$b+c=-5$ …… ㉠

$f'(1)=-3+12+b=-3$이므로 $b=-12$

이것을 ㉠에 대입하면 $c=7$

STEP 3 $f(2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=-x^3+6x^2-12x+7$이므로

$f(2)=-8+24-24+7=-1$

발전유형 14 99쪽

14-1 답 −9

해결전략 | 항등식의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

STEP 1 a, b의 관계식 구하기

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

주어진 식은

$(x-3)(2ax+b)=2(ax^2+bx+c)+9x-11$

$2ax^2+(b-6a)x-3b=2ax^2+(2b+9)x+(2c-11)$

$b-6a=2b+9$이므로

$6a+b=-9$ …… ㉠

$-3b=2c-11$이므로

$3b+2c=11$ …… ㉡

STEP 2 a, b, c의 값 구하기

$f'(-1)=-2a+b=7$ …… ㉢

이므로 ㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=3$

㉡에서 $9+2c=11$ $\therefore c=1$

STEP 3 $f'(3)$의 값 구하기

따라서 $f'(x)=-4x+3$이므로

$f'(3)=-12+3=-9$

14-2 답 16

해결전략 | 관계식을 이용하여 주어진 함수의 차수를 찾는다.

STEP 1 $f(x)$의 차수 구하기

함수 $f(x)$를 n차인 다항함수라고 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 다항함수이다.

$f(x)f'(x)=2x^3-9x^2+5x+6$의 우변의 차수가 3이므로

$n+(n-1)=3$ $\therefore n=2$

즉, 함수 $f(x)$는 이차함수이고, 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=2x+a$

STEP 2 a, b의 값 구하기

$f(x)f'(x)=(x^2+ax+b)(2x+a)$

$=2x^3+3ax^2+(a^2+2b)x+ab$

$=2x^3-9x^2+5x+6$

$3a=-9$이므로 $a=-3$

$a^2+2b=5$이므로 $b=-2$

STEP 3 $f(-3)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^2-3x-2$이므로

$f(-3)=9+9-2=16$

14-3 답 3

해결전략 | 최고차항의 계수를 비교하여 함수식을 구성한다.

STEP 1 $f(x)$ 구성하기

$f(x)=2x^3-\{f'(1)\}^2x^2+3f(1)$에서

$f(x)=2x^3+ax^2+b$ (a, b는 정수)로 놓으면

$f'(x)=6x^2+2ax$

$\therefore f(1)=2+a+b$, $f'(1)=6+2a$

STEP 2 a, b의 값 구하기

이 값을 주어진 식에 대입하면

$f(x)=2x^3-(6+2a)^2x^2+3(2+a+b)$

$=2x^3-(4a^2+24a+36)x^2+(6+3a+3b)$

즉,

$2x^3+ax^2+b=2x^3-(4a^2+24a+36)x^2+(6+3a+3b)$

$a=-(4a^2+24a+36)$이므로

$4a^2+25a+36=0$, $(4a+9)(a+4)=0$

$\therefore a=-4$ ($\because a$는 정수)

$b=6+3a+3b$이므로

$b=6-12+3b$ $\therefore b=3$

STEP 3 $f(1)-f'(1)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=2x^3-4x^2+3$, $f'(x)=6x^2-8x$이므로

$f(1)-f'(1)=1-(-2)=3$

14-4 답 4

해결전략 | 주어진 식을 정리하여 각 항의 계수를 구한다.

STEP 1 $f(x)$의 각 항의 계수 구하기

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f(f'(x))=a(2ax+b)^2+b(2ax+b)+c$

$=4a^3x^2+(4a^2b+2ab)x+(ab^2+b^2+c)$

$f'(f(x))=2a(ax^2+bx+c)+b$
$=2a^2x^2+2abx+(2ac+b)$
$f(f'(x))=f'(f(x))$에서
$4a^3=2a^2$이므로 $2a^2(2a-1)=0$
$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a\neq0$)
$4a^2b+2ab=2ab$이므로 $b=0$
따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+c$이므로
$f(4)=8+c=10$ $\therefore c=2$
STEP 2 $f(2)$의 값 구하기
그러므로 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$이므로
$f(2)=\frac{1}{2}\times4+2=4$

14-5 답 3

해결전략 | 항등식의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구한다.
STEP 1 $f(x)$의 각 항의 계수 구하기
$f(x)=ax^2+b$이므로 $f'(x)=2ax$
주어진 식은
$4(ax^2+b)=(2ax)^2+x^2+4$
$4ax^2+4b=(4a^2+1)x^2+4$
$4a=4a^2+1$이므로 $(2a-1)^2=0$
$\therefore a=\frac{1}{2}$
$4b=4$이므로 $b=1$
STEP 2 $f(2)$의 값 구하기
따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$이므로
$f(2)=\frac{1}{2}\times4+1=3$

14-6 답 $f(x)=2x^2-5x+1$, $f(x)=2x^2+3x+1$

해결전략 | 관계식을 이용하여 주어진 함수의 차수를 찾는다.
STEP 1 $f(x)$의 차수 구하기
함수 $f(x)$를 n차인 다항함수라고 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 다항함수이다.
$f'(x)\{f'(x)+2\}$의 차수는 $2n-2$이고 $8f(x)+8x+7$의 차수는 n이므로
$2n-2=n$ $\therefore n=2$
STEP 2 $f(x)$ 구하기
$f(0)=1$이므로
$f(x)=ax^2+bx+1$ ($a\neq0$, a, b는 상수)로 놓으면
$f'(x)=2ax+b$
$f'(x)\{f'(x)+2\}=(2ax+b)(2ax+b+2)$
$=4a^2x^2+(4ab+4a)x+b(b+2)$
$8f(x)+8x+7=8ax^2+(8b+8)x+15$
$4a^2=8a$이므로 $4a(a-2)=0$
$\therefore a=2$ ($\because a\neq0$)
$b^2+2b=15$이므로 $b^2+2b-15=0$
$(b+5)(b-3)=0$ $\therefore b=-5$ 또는 $b=3$
$\therefore f(x)=2x^2-5x+1$ 또는 $f(x)=2x^2+3x+1$

발전유형 15 101쪽

15-1 답 25

해결전략 | 나눗셈의 관계식을 만들고 양변을 x에 대하여 미분한 후 각각의 식에 $x=-1$을 대입한다.
STEP 1 나눗셈의 관계식 구하기
$x^{10}+2x^7+ax+b$를 $(x+1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면
$x^{10}+2x^7+ax+b=(x+1)^2Q(x)$ …… ㉠
STEP 2 a, b의 값 구하기
양변에 $x=-1$을 대입하면
$1-2-a+b=0$ $\therefore a-b=-1$ …… ㉡
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$10x^9+14x^6+a=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$
양변에 $x=-1$을 대입하면
$-10+14+a=0$ $\therefore a=-4$
이것을 ㉡에 대입하면 $b=-3$
STEP 2 a^2+b^2의 값 구하기
$\therefore a^2+b^2=(-4)^2+(-3)^2=25$
◉⟶ 다른 풀이
STEP 1 $f(1)$, $f'(1)$의 값 구하기
$f(x)=x^{10}+2x^7+ax+b$로 놓으면 $f(x)$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로
$f(-1)=0$, $f'(-1)=0$
STEP 2 a, b의 값 구하기
$f(-1)=0$에서 $1-2-a+b=0$
$\therefore a-b=-1$ …… ㉠
$f'(x)=10x^9+14x^6+a$이므로
$f'(-1)=0$에서 $-10+14+a=0$
$\therefore a=-4$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=-3$
STEP 3 a^2+b^2의 값 구하기
$\therefore a^2+b^2=(-4)^2+(-3)^2=25$

15-2 답 6

해결전략 | 나눗셈의 관계식을 만들고 양변을 x에 대하여 미분한 후 각각의 식에 $x=1$을 대입한다.

STEP 1 나눗셈의 관계식 구하기

$x^{10}-3x+1$을 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$x^{10}-3x+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

STEP 2 a, b의 값 구하기

양변에 $x=1$을 대입하면

$1-3+1=a+b$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9-3=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=1$을 대입하면

$10-3=a$ $\therefore a=7$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=-8$

STEP 3 $R(2)$의 값 구하기

따라서 $R(x)=7x-8$이므로

$R(2)=14-8=6$

15-3 답 5

해결전략 | 나눗셈의 관계식을 만들고 양변을 x에 대하여 미분한 후 각각의 식에 $x=a$를 대입한다.

STEP 1 나눗셈의 관계식 구하기

x^5-5x+k를 $(x-a)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^5-5x+k=(x-a)^2Q(x)$ …… ㉠

STEP 2 a, k의 값 구하기

양변에 $x=a$를 대입하면

$a^5-5a+k=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4-5=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$

양변에 $x=a$를 대입하면

$5a^4-5=0$, $5(a^2+1)(a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

이것을 ㉡에 대입하면 $k=4$

STEP 3 $a+k$의 값 구하기

$\therefore a+k=1+4=5$

15-4 답 13

해결전략 | 나눗셈의 관계식을 만들고 양변을 x에 대하여 미분한 후 각각의 식에 $x=-1$을 대입한다.

STEP 1 나눗셈의 관계식 구하기

x^5+2ax^2+b를 $(x+1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^5+2ax^2+b=(x+1)^2Q(x)+13x+11$ …… ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+2a+b=-2$

$\therefore 2a+b=-1$ …… ㉡

STEP 2 a, b의 값 구하기

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4+4ax=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+13$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$5-4a=13$ $\therefore a=-2$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=3$

STEP 3 a^2+b^2의 값 구하기

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+3^2=13$

15-5 답 9

해결전략 | 함수 $y=f(x)$의 그래프가 지나는 점과 이 점에서의 접선의 기울기를 이용하여 $f(2)$, $f'(2)$의 값을 구한 후 나눗셈의 관계식을 만들고 양변을 x에 대하여 미분한다.

STEP 1 $f(2)$, $f'(2)$의 값 구하기

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, 5)$를 지나고 $x=2$인 점에서 접선의 기울기가 2이므로

$f(2)=5$, $f'(2)=2$

STEP 2 나눗셈의 관계식 구하기

$f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+ax+b$

STEP 3 a, b의 값 구하기

$\therefore f(2)=2a+b=5$ …… ㉠

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+a$이므로

$f'(2)=a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

STEP 4 $R(4)$의 값 구하기

따라서 $R(x)=2x+1$이므로

$R(4)=8+1=9$

15-6 답 30

해결전략 | 나눗셈의 관계식을 만들고 양변을 x에 대하여 미분한 후 각각의 식에 $x=-2$를 대입한다.

STEP 1 나눗셈의 관계식 구하기

$x^n(x^2+ax+b)$를 $(x+2)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^n(x^2+ax+b)=(x+2)^2Q(x)+(-2)^n(x+2)$ ····· ㉠

STEP 2 a, b의 값 구하기

양변에 $x=-2$를 대입하면

$(-2)^n(4-2a+b)=0$

$\therefore\ 4-2a+b=0$ ····· ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$nx^{n-1}(x^2+ax+b)+x^n(2x+a)$

$=2(x+2)Q(x)+(x+2)^2Q'(x)+(-2)^n$

양변에 $x=-2$를 대입하면

$n\times(-2)^{n-1}(4-2a+b)+(-2)^n(-4+a)=(-2)^n$

㉡에 의하여

$(-2)^n(a-4)=(-2)^n$, $a-4=1$

$\therefore\ a=5$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=6$

STEP 3 ab의 값 구하기

$\therefore\ ab=5\times6=30$

유형 특강 103쪽

1 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

해결전략 | 평균변화율과 미분계수의 기하적 의미를 이해하고 보기의 참, 거짓을 판별한다.

STEP 1 $\frac{f(a)}{a}$의 기하적 의미 이해하기

$y=f(x)$의 그래프가 원점 O를 지나므로

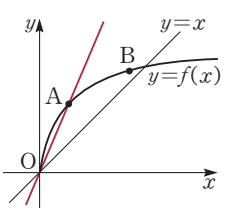
$\frac{f(a)}{a}=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}$

즉, $\frac{f(a)}{a}$는 원점 O와 점 A를 이은 직선의 기울기이다.

STEP 2 ㄱ의 참, 거짓 확인하기

ㄱ. 직선 $y=x$의 기울기가 1이고, 두 점 O, A를 이은 직선의 기울기는 1보다 크므로

$\frac{f(a)}{a}>1$ (참)



STEP 3 $f(b)-f(a)<b-a$의 기하적 의미 이해하기

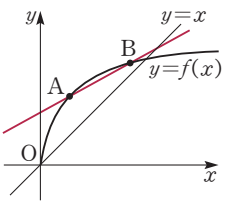
$f(b)-f(a)<b-a$에서 $b-a>0$이므로 양변을 $b-a$로 나누면

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$

STEP 4 ㄴ의 참, 거짓 확인하기

ㄴ. 두 점 A, B의 평균변화율, 즉 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로

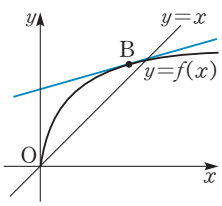
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ (참)



STEP 5 ㄷ의 참, 거짓 확인하기

ㄷ. $f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이므로

$f'(b)<1$ (거짓)

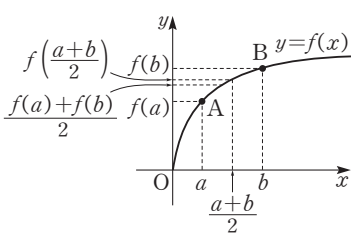


STEP 6 ㄹ의 참, 거짓 확인하기

ㄹ. 그래프가 위로 볼록한 경우

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$와 $\frac{f(a)+f(b)}{2}$

의 값은 다음 그림과 같다.

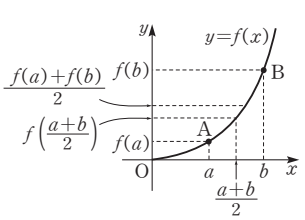


$\therefore\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

풍쌤의 비법

그래프가 아래로 볼록한 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$와 $\frac{f(a)+f(b)}{2}$의 값은 다음 그림과 같다.



$\therefore\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2}$

실전 연습 문제 104~106쪽

01 ③	**02** ④	**03** ㄷ	**04** -7	**05** 1
06 ③	**07** ③	**08** ③	**09** 20	**10** 2
11 ②	**12** 11	**13** 7	**14** ②	**15** ②
16 ②	**17** 7	**18** 8		

01

해결전략 | 평균변화율과 미분계수의 정의를 이용한다.

STEP 1 평균변화율 구하기

x의 값이 -1에서 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{6-0}{2}=3$$

STEP 2 a의 값 구하기

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(2x^2+3x+1)-(2a^2+3a+1)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2(x-a)(x+a)+3(x-a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(2x+2a+3)$$

$$=4a+3$$

따라서 $4a+3=3$이므로 $a=0$

◉→ 다른 풀이

STEP 2 a의 값 구하기

$f'(x)=4x+3$이므로 $x=a$에서의 미분계수는 $4a+3$이다.

따라서 $4a+3=3$이므로 $a=0$

02

해결전략 | 직선의 기울기와 평균변화율의 정의를 이용한다.

STEP 1 직선의 기울기 이용하기

두 점 $(0,\ f(0))$, $(2,\ f(2))$를 지나는 직선의 기울기가 2이므로

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=2 \qquad \therefore f(2)-f(0)=4$$

두 점 $(2,\ f(2))$, $(4,\ f(4))$를 지나는 직선의 기울기가 4이므로

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=4 \qquad \therefore f(4)-f(2)=8$$

STEP 2 평균변화율 구하기

따라서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{f(4)-f(2)+f(2)-f(0)}{4}$$

$$=\frac{8+4}{4}=3$$

03

해결전략 | 직선의 기울기를 비교하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

STEP 1 ㄱ의 참, 거짓 판별하기

$\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$라고 하자.

ㄱ. $\frac{f(a)}{a}$는 원점과 점 A를 지나는 직선의 기울기이고

$\frac{f(b)}{b}$는 원점과 점 B를 지나는 직선의 기울기이므로

$\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$ (거짓)

STEP 2 ㄴ의 참, 거짓 판별하기

ㄴ. $b-a>0$이므로 $f(a)-f(b)>b-a$에서

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>1$

그런데 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ (거짓)

STEP 3 ㄷ의 참, 거짓 판별하기

ㄷ. 점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$, 점 B에서의 접선의 기울기는 $f'(b)$이므로

$f'(a)>f'(b)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

04

해결전략 | 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형하며 미분계수의 값을 대입한다.

STEP 1 $g(0)$의 값 구하기

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-2h)-f(2+h)+g(h)}{h}=2$에서 $h\longrightarrow 0$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to 0}\{f(2-2h)-f(2+h)+g(h)\}=0$이므로

$\lim_{h\to 0}g(h)=g(0)=0$

STEP 2 $g'(0)$의 값 구하기

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-2h)-f(2+h)+g(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2-2h)-f(2+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}$$

$$=-2\lim_{h\to 0}\frac{f(2-2h)-f(2)}{-2h}$$
$$-\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$$
$$=-2f'(2)-f'(2)+g'(0)$$
$$=-3f'(2)+g'(0)$$
$$=-3\times(-3)+g'(0)$$
$$=9+g'(0)=2$$
$$\therefore g'(0)=-7$$

05

해결전략 | 미분계수의 정의를 이용한다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{2}=2\times\frac{1}{2}=1$$

06

해결전략 | $f(0)$의 값을 구하고 주어진 조건과 미분계수의 정의를 이용하여 $f'(k)$를 구한다.

STEP 1 $f(0)$의 값 구하기

$x=0$, $y=0$을 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy$에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0$ $\therefore f(0)=0$

STEP 2 $f'(0)$의 값 구하기

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(2)+f(h)-4h\}-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}-4$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-4$$
$$=f'(0)-4$$

이므로 $f'(0)-4=4$ $\therefore f'(0)=8$

STEP 3 $f'(k)$ 구하기

$$f'(k)=\lim_{h\to 0}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(k)+f(h)-2kh\}-f(k)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2kh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}-2k$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-2k$$
$$=f'(0)-2k=8-2k$$

STEP 4 $f'(-2)+f'(-1)+f'(0)+f'(1)$의 값 구하기

$\therefore f'(-2)+f'(-1)+f'(0)+f'(1)$

$=12+10+8+6=36$

07

해결전략 | 함수가 연속임을 확인하고 (좌미분계수)=(우미분계수)인지 확인한다.

STEP 1 함수 $xf(x)$의 미분가능성 확인하기

ㄱ. $f(x)=\begin{cases}-x & (x<0)\\ x & (x\geq 0)\end{cases}$이므로

$xf(x)=\begin{cases}-x^2 & (x<0)\\ x^2 & (x\geq 0)\end{cases}$

$xf(x)=h_1(x)$로 놓으면

$h_1(0)=0$이고 $\lim_{x\to 0-}h_1(x)=\lim_{x\to 0+}h_1(x)=0$이므로

함수 $h_1(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{h_1(x)-h_1(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{h_1(x)-h_1(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0+}x=0$$

$\therefore h_1'(0)=0$

즉, 함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

STEP 2 함수 $f(x)g(x)$의 미분가능성 확인하기

ㄴ. $f(x)g(x)=\begin{cases}x^2+x & (x<0)\\ 2x^2+x & (x\geq 0)\end{cases}$

$f(x)g(x)=h_2(x)$로 놓으면

$h_2(0)=0$이고 $\lim_{x\to 0-}h_2(x)=\lim_{x\to 0+}h_2(x)=0$이므로

함수 $h_2(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{h_2(x)-h_2(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}(x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{h_2(x)-h_2(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{2x^2+x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}(2x+1)=1$$

$\therefore h_2'(0)=1$

함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

STEP 3 함수 $|f(x)-g(x)|$의 미분가능성 확인하기

ㄷ. $f(x)-g(x)=\begin{cases}1 & (x<0)\\ -x-1 & (x\geq 0)\end{cases}$이고

$x\geq 0$에서 $-x-1<0$이므로

$|f(x)-g(x)|=\begin{cases}1 & (x<0)\\ x+1 & (x\geq 0)\end{cases}$

$|f(x)-g(x)|=h_3(x)$로 놓으면

$h_3(0)=1$이고 $\lim_{x\to 0-}h_3(x)=\lim_{x\to 0+}h_3(x)=1$이므로

함수 $h_3(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0-}\frac{h_3(x)-h_3(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{1-1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{h_3(x)-h_3(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(x+1)-1}{x}=1$$

즉, $\lim_{x\to0}\frac{h_3(x)-h_3(0)}{x-0}$의 값이 존재하지 않으므로

함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

08

해결전략 | 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

STEP 1 식을 간단히 하기

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}=\frac{3}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}$$

$$=\frac{3}{2}f'(1)$$

STEP 2 $\frac{3}{2}f'(1)$의 값 구하기

이때 $f'(x)=3x^2-1$이므로

$$\frac{3}{2}f'(1)=\frac{3}{2}\times2=3$$

09

해결전략 | $x=2$에서 (좌극한값)=(우극한값),

(좌미분계수)=(우미분계수)임을 이용하여 식을 세워 미지수를 구한다.

STEP 1 함수 $f(x)$가 연속임을 이용하여 관계식 구하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(2x^2+ax+b)=8+2a+b$,

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(5ax-12)=10a-12$

에서 $8+2a+b=10a-12$

$\therefore b=8a-20$ …… ㉠

STEP 2 미분가능함을 이용하여 a의 값 구하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{(2x^2+ax+b)-(10a-12)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{2x^2+ax-2a-8}{x-2}\ (\because \text{㉠})$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)(2x+a+4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}(2x+a+4)=a+8$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(5ax-12)-(10a-12)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{5a(x-2)}{x-2}=5a$$

에서 $a+8=5a$이므로 $a=2$

STEP 3 a^2+b^2의 값 구하기

이것을 ㉠에 대입하면 $b=-4$

$\therefore a^2+b^2=2^2+(-4)^2=20$

10

해결전략 | $x=2$에서 (좌미분계수)=(우미분계수)임을 이용하여 식을 세워 미지수를 구한다.

STEP 1 $g(x)$ 나타내기

$$f(x)=\begin{cases}4-2x & (x<2)\\ x+a & (x\geq2)\end{cases}$$이므로

$$g(x)=\begin{cases}(x^2-2x)(4-2x) & (x<2)\\ (ax+b)(x+a) & (x\geq2)\end{cases}$$ …… ❶

STEP 2 미분가능함을 이용하여 관계식 구하기

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하고

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{-2x(x-2)^2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}\{-2x(x-2)\}=0$$

이므로

$$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(ax+b)(x+a)}{x-2}=0$$

이어야 한다.

따라서 $(ax+b)(x+a)$는 $(x-2)^2$을 인수로 가져야 하므로

$(ax+b)(x+a)=a(x-2)^2$ …… ❷

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

$ax^2+(a^2+b)x+ab=ax^2-4ax+4a$

양변의 계수를 비교하면

$a^2+b=-4a$, $ab=4a$

$ab=4a$에서 $a\neq0$이므로 $b=4$

이것을 $a^2+b=-4a$에 대입하면

$a^2+4=-4a$, $a^2+4a+4=0$

$(a+2)^2=0$ $\therefore a=-2$

$\therefore a+b=-2+4=2$ …… ❸

◉→ 다른 풀이

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

$$(ax+b)(x+a)=a\left(x+\frac{b}{a}\right)(x+a)=a(x-2)^2$$

이므로

$\frac{b}{a}=-2,\ a=-2 \qquad \therefore b=4$

$\therefore a+b=-2+4=2$

채점 요소	배점
❶ $g(x)$ 나타내기	20 %
❷ 미분가능함을 이용하여 관계식 구하기	40 %
❸ $a+b$의 값 구하기	40 %

참고 함수 $g(x)$의 $x=2$에서의 미분가능성만 따져도 a, b의 값을 구할 수 있으므로 함수 $g(x)$의 $x=2$에서의 연속성은 확인해보지 않아도 된다.

11

해결전략 I 절댓값 기호 안을 0이 되게 하는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 각 구간에서 도함수와 미분계수를 구한다.

STEP 1 미분가능성 확인하기

$g(x)=x|x|$, $h(x)=|x-1|^3$으로 놓으면

$g(x)=\begin{cases}-x^2 & (x<0)\\ x^2 & (x\geq 0)\end{cases}$이고

$g'(x)=\begin{cases}-2x & (x<0)\\ 2x & (x>0)\end{cases}$이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0+}g'(x)=0 \qquad \therefore g'(0)=0$

또, $h(x)=\begin{cases}-(x-1)^3 & (x<1)\\ (x-1)^3 & (x\geq 1)\end{cases}$이고

$h'(x)=\begin{cases}-3(x-1)^2 & (x<1)\\ 3(x-1)^2 & (x>1)\end{cases}$이므로

$\lim\limits_{x\to 1-}h'(x)=\lim\limits_{x\to 1+}h'(x)=0 \qquad \therefore h'(0)=0$

따라서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 실수 전체에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$도 실수 전체에서 미분가능하다.

STEP 2 $f'(0)+f'(1)$의 값 구하기

$f'(0)=g'(0)+h'(0)=0-3=-3$

$f'(1)=g'(1)+h'(1)=2+0=2$

$\therefore f'(0)+f'(1)=-3+2=-1$

다른 풀이

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\begin{cases}-x^2-(x-1)^3 & (x<0)\\ x^2-(x-1)^3 & (0\leq x<1)\\ x^2+(x-1)^3 & (x\geq 1)\end{cases}$이므로

$f'(x)=\begin{cases}-2x-3(x-1)^2 & (x<0)\\ 2x-3(x-1)^2 & (0<x<1)\\ 2x+3(x-1)^2 & (x>1)\end{cases}$

STEP 2 $f'(0)+f'(1)$의 값 구하기

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=-3$

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f'(x)=2$

$\therefore f'(0)+f'(1)=-3+2=-1$

12

해결전략 I 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=c$ (c는 상수)이면 $f(a)=b$, $f'(a)=c$임을 이용한다.

STEP 1 함숫값과 미분계수 구하기

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$에서 $f(1)=2$, $f'(1)=3$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x-1}=4$에서 $g(1)=1$, $g'(1)=4$

STEP 2 $h'(1)$구하기

$h(x)=f(x)g(x)$이므로

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\therefore h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=3\times 1+2\times 4=11$

13

해결전략 I 미분계수의 정의를 이용하여 곱의 미분법을 정리한다.

$f(2)g(2)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)-1}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(x)+f(2)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times g(x)\right\}$

$+\lim\limits_{x\to 2}\left\{f(2)\times\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\right\}$

$=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

$=4\times 1+1\times 3=7$

다른 풀이

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$

$=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

$=4\times 1+1\times 3=7$

14

해결전략 I 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

STEP 1 극한식 변형하기

$f(1)=1-3+2=0$, $g(1)=2-3+1=0$이므로

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-g(1-2h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)+g(1)-g(1-2h)}{h}$$

$$=3\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}+2\lim_{h\to0}\frac{g(1-2h)-g(1)}{-2h}$$

$=3f'(1)+2g'(1)$

STEP 2 극한값 구하기

$f'(x)=3x^2-6x$이므로

$f'(1)=3-6=-3$

$g'(x)=6x^2-3$이므로

$g'(1)=6-3=3$

$\therefore 3f'(1)+2g'(1)=3\times(-3)+2\times3=-3$

15

해결전략 | 함수를 적절하게 치환하여 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

STEP 1 $f(x)$ 정하기

$f(x)=x^n+3x$로 놓으면 $f(1)=4$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^n+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=5$

STEP 2 n의 값 구하기

이때 $f'(x)=nx^{n-1}+3$이므로

$f'(1)=n+3=5 \quad \therefore n=2$

16

해결전략 | 미분계수의 정의를 이용하여 미지수의 값을 구한다.

STEP 1 $f(1)$, $f'(1)$의 값 구하기

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=6$이므로

$f(1)=-1$, $f'(1)=6$

STEP 2 a, b의 값 구하기

$f(1)=1+a+b-3=-1$

$\therefore a+b=1$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(1)=3+2a+b=6$

$\therefore 2a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

STEP 3 $f'(-1)$의 값 구하기

따라서 $f'(x)=3x^2+4x-1$이므로

$f'(-1)=3-4-1=-2$

풍쌤의 비법

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=k$이면 $f(a)=b$이고 $f'(a)=k$임을 이용한다.

17

해결전략 | 최고차항의 차수와 계수를 비교하여 함수식을 구성한다.

STEP 1 $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수 구하기

함수 $f(x)$를 n차인 다항함수라고 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 다항함수이다.

$f(x)$의 최고차항을 $ax^n(a\neq0)$이라고 하면 $f'(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}이고 조건 ㈎에서 최고차항만 비교하면

$a^2n^2x^{2n-2}=2ax^n$이므로

$a^2n^2=2a$, $2n-2=n$ → $n=2$를 $a^2n^2=2a$에 대입하면 $4a^2=2a$, $2a(2a-1)=0$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore n=2$, $a=\frac{1}{2}$ $(\because a\neq0)$ …… ❶

STEP 2 b, c의 값 구하기

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ (b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=x+b$

조건 ㈏에서 $f'(0)=b=2$

조건 ㈎에서 $(x+b)^2=2\left(\frac{1}{2}x^2+bx+c\right)+2$이므로

$x^2+4x+4=x^2+4x+(2c+2)$

$4=2c+2$이므로 $c=1$ …… ❷

STEP 3 $f(2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$이므로

$f(2)=2+4+1=7$ …… ❸

채점 요소	배점
❶ $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수 구하기	50 %
❷ b, c의 값 구하기	30 %
❸ $f(2)$의 값 구하기	20 %

18

해결전략 | 나눗셈의 관계식을 만들고 양변을 x에 대하여 미분한 후 각각의 식에 $x=-1$을 대입한다.

STEP 1 나눗셈의 관계식 구하기

$x^{10}+ax^9+b$를 $(x+1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^{10}+ax^9+b=(x+1)^2Q(x)+8x+12$ …… ㉠

STEP 2 a, b의 값 구하기

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-a+b=4$ …… ㉡

…… ❶

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9+9ax^8=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+8$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-10+9a=8 \quad \therefore a=2$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=5$ ····· ❷

STEP 3 $x-1$로 나눈 나머지 구하기

나머지정리에 의하여 $x^{10}+2x^9+5$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$1+2+5=8$ ····· ❸

채점 요소	배점
❶ a, b의 관계식 구하기	40 %
❷ a, b의 값 구하기	40 %
❸ 나머지 구하기	20 %

상위권 도약 문제 107~108쪽

01 ③ **02** 8 **03** $g(x)=(x-1)^2$
04 32 **05** -15 **06** 19 **07** x^9
08 13

01

해결전략 | 평균변화율의 정의를 이용하여 $f(x)$의 형태를 파악한다.

STEP 1 $f(x)$의 형태 파악하기

주어진 식을 변형하면

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=\frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}$$

따라서 모든 실수 x에 대하여 닫힌구간 $[x-1, x]$, $[x, x+1]$에서의 평균변화율이 항상 같으므로 $f(x)$는 일차함수이다.

STEP 2 $f'(-1)$의 값 구하기

$f(x)=ax+b$ ($a\neq 0$, a, b는 상수)로 놓으면 $f'(x)=a$

$f'(1)=a=3$이므로

$f'(-1)=3$

02

해결전략 | 극한식에서 $f(2)$, $f'(2)$의 값을 구하고, 인수를 이용하여 $f(x)$의 식을 구성한다.

STEP 1 $f(2)$, $f'(2)$의 값 구하기

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\dfrac{1}{3}$에서 $x\longrightarrow 2$일 때,

(분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{\{f'(x)\}^2}$$

$$=f'(2)\times\frac{1}{\{f'(2)\}^2}$$

$$=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{3}$$

$\therefore f'(2)=3$

STEP 2 함수 구성하기

$f(1)=0$, $f(2)=0$이고 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$ (a는 상수)로 놓으면

$f'(x)=(x-2)(x+a)+(x-1)(x+a)$
$\qquad +(x-1)(x-2)$

STEP 3 $f(3)$의 값 구하기

$f'(2)=2+a=3$이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+1)$이므로

$f(3)=2\times 1\times 4=8$

03

해결전략 | 연속성과 미분가능성을 이용한다.

STEP 1 연속성을 이용하여 함숫값 구하기

$f(x)g(x)=\begin{cases}(2x-3)g(x) & (x<1)\\ x^2g(x) & (x\geq 1)\end{cases}$에 대하여

$x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}(2x-3)g(x)=-g(1)$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+} x^2g(x)=g(1)$$

즉, $-g(1)=g(1)$이므로 $g(1)=0$

STEP 2 미분가능성을 이용하여 미분계수 구하기

$x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(2x-3)g(x)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\left\{(2x-3)\times\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}=-g'(1)$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2g(x)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\left\{x^2\times\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}=g'(1)$$

에서 $-g'(1)=g'(1)$

$\therefore g'(1)=0$

STEP 3 $g(x)$ 구하기

함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $g(1)=g'(1)=0$이므로 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

따라서 $(x-1)^2$을 인수로 갖는 다항함수 중 차수가 가장 작은 것은

$g(x)=(x-1)^2$

04

해결전략 | 좌극한과 우극한을 비교하여 관계식을 구한다.

STEP 1 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속임을 이용하여 관계식 구하기

함수 $f(x)=(x^2+ax+b)[x]$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(x^2+ax+b)\times 1=4+2a+b$,

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2+ax+b)\times 2=8+4a+2b$

에서 $4+2a+b=8+4a+2b$

$2a+b=-4$

$\therefore b=-4-2a$ …… ㉠

STEP 2 미분가능함을 이용하여 a의 값 구하기

$f(2)=2(4+2a+b)=0$ ($\because$ ㉠)이고

$x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{x^2+ax-(4+2a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}(x+a+2)$$
$$=4+a$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{2\{x^2+ax-(4+2a)\}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{2(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}2(x+a+2)$$
$$=8+2a$$

에서 $4+a=8+2a$ $\therefore a=-4$

STEP 3 a^2+b^2의 값 구하기

이것을 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore a^2+b^2=(-4)^2+4^2=32$

05

해결전략 | 관계식을 이용하여 차수를 찾아 $f(x)$를 구성한다.

STEP 1 $f(x)$ 구성하기

함수 $f(x)$를 n차인 다항함수라고 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 다항함수이다.

$f(x)f'(x)$가 삼차함수이므로 $f(x)$는 이차함수이다.

$f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=2x+a$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$\therefore f(x)f'(x)=(x^2+ax+b)(2x+a)$
$=2x^3+3ax^2+(2b+a^2)x+ab$
$=2x^3-12x^2+16x$

$3a=-12$이므로 $a=-4$

$2b+a^2=16$이므로

$2b+16=16$ $\therefore b=0$

$\therefore f(x)=x^2-4x$

STEP 3 $f(-1)f(1)$의 값 구하기

$\therefore f(-1)f(1)=5\times(-3)=-15$

06

해결전략 | 조건 (가)를 이용하여 $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구한다.

STEP 1 $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수 구하기

조건 (가)에서

$f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\neq 1$)이라고 하면

$\{f(x)\}^2-f(x^2)$의 최고차항은

$a^2x^{2n}-ax^{2n}=a(a-1)x^{2n}$ …… ㉠

또, $x^3f(x)$의 최고차항은

ax^{n+3} …… ㉡

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}$이 0이 아닌 극한값이 존재하려면

(분모의 차수)=(분자의 차수)이므로 ㉠, ㉡에서

$2n=n+3$ $\therefore n=3$

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}=4$이므로

$\frac{a(a-1)}{a}=4$ $\therefore a=5$

STEP 2 $f'(1)$의 값 구하기

$f(x)=5x^3+bx^2+cx+d$ (b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=15x^2+2bx+c$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{15x^2+2bx+c}{x} \quad \cdots\cdots ㉢$$

$x\longrightarrow 0$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to 0}(15x^2+2bx+c)=c=0$

이것을 ㉢에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{15x^2+2bx}{x}=\lim_{x\to 0}(15x+2b)=2b=4$$

$\therefore b=2$

따라서 $f'(x)=15x^2+4x$이므로

$f'(1)=15+4=19$

07

해결전략 I 주어진 관계식을 이용하여 $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구한다.

STEP 1 극한식을 이용하여 관계식 구하기

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1$이므로 $f(x)$의 최고차항은 x^m이고 ($f(x)=x^m+\cdots$이므로 $f'(x)=mx^{m-1}+\cdots$)

$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a$이므로 $m=a$이다.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b$이므로 $f(x)$는 n차 이상의 항들로만 이루어져 있고 ($f(x)=\cdots+bx^n$이므로 $f'(x)=\cdots+bnx^{n-1}$) n차항의 계수는 b이다.

$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$이므로 $bn=9$

STEP 2 ab의 값이 최소가 되는 조건 구하기

함수 $f(x)$의 최고차항이 x^m이므로 $m\geq n$이고 $m=a$, $bn=9$이므로

$$ab=m\times\frac{9}{n}\geq 9\ (\because m\geq n)$$

따라서 ab의 최솟값은 $m=n$일 때 9이다.

STEP 3 $f(x)$ 구하기

$m=n$이고 최고차항인 x^m의 계수는 1, n차항의 계수는 b이므로 $b=1$

이것을 $bn=9$에 대입하면

$n=9 \quad \therefore m=9$

$\therefore f(x)=x^9$

08

해결전략 I 좌미분계수와 우미분계수를 비교하여 관계식을 구한다.

STEP 1 좌미분계수와 우미분계수 비교하기

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 직선 $x=k$에 대하여 대칭인 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=k$에서 미분가능하면 된다.

$$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k-}\frac{f(2k-x)-f(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k-}\left\{\frac{(2k-x)^3-(2k-x)^2-9(2k-x)+1}{x-k}-\frac{k^3-k^2-9k+1}{x-k}\right\}$$

$$=\lim_{x\to k-}\frac{(k-x)\{(2k-x)^2+k(2k-x)+k^2-(3k-x)-9\}}{x-k}$$

$$=-\lim_{x\to k-}\{(2k-x)^2+k(2k-x)+k^2-(3k-x)-9\}$$

$$=-3k^2+2k+9$$

$$\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{(x^3-x^2-9x+1)-(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{(x-k)\{x^2+kx+k^2-(x+k)-9\}}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+}\{x^2+kx+k^2-(x+k)-9\}$$

$$=3k^2-2k-9$$

즉, $-3k^2+2k+9=3k^2-2k-9$이므로

$3k^2-2k-9=0$

STEP 2 p^2+q^2의 값 구하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

따라서 $p=3$, $q=2$이므로

$p^2+q^2=3^2+2^2=13$

풍쌤의 비법

두 함수 $y=f(x)$, $y=f(2k-x)$의 그래프는 직선 $x=k$에 대하여 대칭이다. 위의 문제와 같이 실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq k) \\ f(2k-x) & (x<k) \end{cases}$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=k$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(x)$가 실수 전체에서 미분가능하기 위해서는 $f'(k)=0$이어야 한다.

04 도함수의 활용(1)

개념확인 110~111쪽

01 답 $y=2x-3$

$f(x)=x^2-2x+1$로 놓으면

$f'(x)=2x-2$

이 곡선 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=2\times2-2=2$

따라서 기울기가 2이고 점 $(2, 1)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-1=2(x-2)$ $\therefore y=2x-3$

02 답 (1) $y=2x-8$ (2) $y=-2x, y=-2x+4$

(1) $f(x)=x^2-4x+1$로 놓으면 $f'(x)=2x-4$

접점의 좌표를 $(t, f(t))$라고 하면

$f'(t)=2t-4=2$ $\therefore t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3, -2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-2)=2(x-3)$ $\therefore y=2x-8$

(2) $f(x)=-x^3+x+2$로 놓으면 $f'(x)=-3x^2+1$

접점의 좌표를 $(t, f(t))$라고 하면

$f'(t)=-3t^2+1=-2$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 2)$, $(1, 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=-2\{x-(-1)\}$, $y-2=-2(x-1)$

$\therefore y=-2x$, $y=-2x+4$

03 답 (1) $y=2x+1$ (2) $y=2x-1, y=-2x-5$

(1) $f(x)=x^3-x+3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 (t, t^3-t+3)이라고 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-t+3)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3+3$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=-2t^3+3$, $t^3-1=0$, $(t-1)(t^2+t+1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t^2+t+1>0$)

따라서 $t=1$을 ㉠에 대입하면

$y=2x+1$

(2) $f(x)=x^2+2x-1$로 놓으면

$f'(x)=2x+2$

접점의 좌표를 (t, t^2+2t-1)이라고 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-(t^2+2t-1)=(2t+2)(x-t)$

$\therefore y=(2t+2)x-t^2-1$ …… ㉠

이 직선이 점 $(-1, -3)$을 지나므로

$-3=-t^2-2t-3$, $t^2+2t=0$, $t(t+2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$t=0$일 때, $y=2x-1$

$t=-2$일 때, $y=-2x-5$

04 답 (1) 4 (2) 0

(1) 함수 $f(x)=x^2-8x$는 닫힌구간 $[0, 8]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 8)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(8)=0$이므로 $f'(c)=0$인 c $(0<c<8)$가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-8$이므로 $f'(c)=2c-8=0$

$\therefore c=4$

(2) 함수 $f(x)=x^4-2x^2+1$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하며

$f(-1)=f(1)=0$이므로 $f'(c)=0$인

c $(-1<c<1)$가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=4x^3-4x$이므로 $f'(c)=4c^3-4c=0$

$c(c+1)(c-1)=0$

$\therefore c=0$ ($\because -1<c<1$)

05 답 (1) 2 (2) 2

(1) 함수 $f(x)=2x^2-4x+1$은 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하므로

$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$ $(1<c<3)$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=4x-4$이므로

$\dfrac{7-(-1)}{3-1}=4c-4$, $4c=8$

$\therefore c=2$

(2) 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로

$\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$ $(0<c<3)$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-6x+2$이므로

$\dfrac{6-0}{3-0}=3c^2-6c+2$, $3c^2-6c=0$, $c(c-2)=0$

$\therefore c=2$ ($\because 0<c<3$)

필수유형 01

113쪽

01-1 답 $a=-7, b=8$

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$가 지나는 점과 이 점에서의 접선의 기울기를 이용하여 상수 a, b의 값을 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^3+ax^2+bx$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3+ax^2+bx$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

STEP 2 a, b의 관계식 구하기

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$f(1)=1+a+b=2$

$\therefore a+b=1$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 -3이므로

$f'(1)=3+2a+b=-3$

$\therefore 2a+b=-6$ …… ㉡

STEP 3 a, b의 값 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-7, b=8$

01-2 답 $a=-3, b=1$

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$가 지나는 점과 이 점에서의 접선의 기울기를 이용하여 상수 a, b의 값을 구한다.

STEP 1 $f(x)=-2x^2+3x+a$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=-2x^2+3x+a$로 놓으면

$f'(x)=-4x+3$

STEP 2 b의 값 구하기

곡선 $y=f'(x)$ 위의 점 $(b, -2)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(b)=-4b+3=-1$

$4b=4 \quad \therefore b=1$

STEP 3 a의 값 구하기

곡선 $y=f(x)$는 점 $(1, -2)$를 지나므로

$f(1)=-2+3+a=-2$

$1+a=-2 \quad \therefore a=-3$

01-3 답 15

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같음을 이용한다.

STEP 1 $f'(2)$의 값 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(2)=3$

STEP 2 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+5h)-f(2)}{h}$의 값 구하기

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2+5h)-f(2)}{h}=5\lim_{h\to 0}\frac{f(2+5h)-f(2)}{5h}$$
$$=5f'(2)=15$$

01-4 답 1

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점과 이 두 점에서의 접선의 기울기를 이용하여 상수 a, b, c의 값을 구한다.

STEP 1 $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓고 a, b, c의 관계식 구하기

$f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-3, 2)$, $(1, 0)$을 지나므로

$9a-3b+c=2$ …… ㉠

$a+b+c=0$ …… ㉡

STEP 2 a의 값 구하기

$f'(x)=2ax+b$이고, 두 점 $(-3, 2)$, $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는 각각

$f'(-3)=-6a+b$, $f'(1)=2a+b$

이때 $f'(-3)=f'(1)$이므로 $-6a+b=2a+b$

$8a=0 \quad \therefore a=0$

STEP 3 b, c의 값 구하기

$a=0$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$-3b+c=2$, $b+c=0$

두 식을 연립하여 풀면

$b=-\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{1}{2}$

STEP 4 $a+2b+4c$의 값 구하기

$\therefore a+2b+4c=0+(-1)+2=1$

풍쌤의 비법

곡선 $y=f(x)$에 대하여 $x=\alpha$, $x=\beta$인 두 점에서의 접선이 평행하다.

➡ 두 접선의 기울기가 같다.

➡ $f'(\alpha)=f'(\beta)$

01-5 답 2

해결전략 | 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용하여 상수 a, b의 값을 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^3-ax+b$로 놓고 $f'(1)$의 값 구하기

$f(x)=x^3-ax+b$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=3-a$

STEP 2 a의 값 구하기

이 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$(3-a)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1,\ 3-a=2 \quad \therefore a=1$
($\rightarrow f(x)=x^3-x+b$)

STEP 3 b의 값 구하기

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 1)$을 지나므로
$f(1)=1-1+b=1 \quad \therefore b=1$

STEP 4 $a+b$의 값 구하기

$\therefore a+b=1+1=2$

01-6 답 $\frac{58}{3}$

해결전략 | 위로 볼록한 이차함수의 그래프는 꼭짓점에서 최댓값을 가짐을 이용하여 상수 a, b, M의 값을 구한다.

STEP 1 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+x+5$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+x+5$로 놓으면
$f'(x)=-x^2+4x+1$

STEP 2 a, M의 값 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 $f'(a)$이므로
$f'(a)=-a^2+4a+1=-(a-2)^2+5$
따라서 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기의 최댓값은 $a=2$일 때 5이므로 $M=5$

STEP 3 b의 값 구하기

이때 접점의 좌표가 $(2, b)$이므로
$b=f(2)=-\frac{8}{3}+8+2+5=\frac{37}{3}$

STEP 4 $a+b+M$의 값 구하기

$\therefore a+b+M=2+\frac{37}{3}+5=\frac{58}{3}$

> **풍쌤의 비법**
> 곡선 $y=f(x)$에 대하여 접선의 기울기의 최대, 최소는 $f'(x)$의 최대, 최소와 같다.

필수유형 02 115쪽

02-1 답 $a=4, b=-2, c=1$

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=-2x^3+ax-3$으로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=-2x^3+ax-3$으로 놓으면
$f'(x)=-6x^2+a$

STEP 2 a의 값 구하기

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, -1)$을 지나므로
$f(1)=-2+a-3=-1$
$\therefore a=4$

STEP 3 b, c의 값 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=-6+4=-2$
따라서 기울기가 -2이고 점 $(1, -1)$을 지나는 접선의 방정식은
$y-(-1)=-2(x-1) \quad \therefore y=-2x+1$
$\therefore b=-2, c=1$

02-2 답 10

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=x^3-6x^2+6$으로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-6x^2+6$으로 놓으면
$f'(x)=3x^2-12x$

STEP 2 접선의 방정식 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=3-12=-9$
따라서 기울기가 -9이고 점 $(1, 1)$을 지나는 접선의 방정식은
$y-1=-9(x-1) \quad \therefore y=-9x+10$

STEP 3 a의 값 구하기

이 직선이 점 $(0, a)$를 지나므로
$a=-9\times0+10=10$

02-3 답 $y=-x+1$

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$를 지나고, 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $(f'(a)\neq0)$임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=-x^3-2x^2+3$으로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=-x^3-2x^2+3$으로 놓으면
$f'(x)=-3x^2-4x$

STEP 2 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=-3+4=1$

STEP 3 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선과 수직인 직선의 방정식 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-2=-\{x-(-1)\}$ $\therefore y=-x+1$

02-4 답 $(3, -18)$

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=x^3-3x^2-6x+8$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-3x^2-6x+8$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-6x-6$

STEP 2 점 $(1, 0)$에서의 접선의 방정식 구하기

점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=3-6-6=-9$이므로 접선의 방정식은
$y-0=-9(x-1)$ $\therefore y=-9x+9$ …… ㉠

STEP 3 점 $(4, 0)$에서의 접선의 방정식 구하기

점 $(4, 0)$에서의 접선의 기울기는
$f'(4)=48-24-6=18$이므로 접선의 방정식은
$y-0=18(x-4)$ $\therefore y=18x-72$ …… ㉡

STEP 4 두 접선의 교점의 좌표 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-18$
따라서 두 접선의 교점의 좌표는 $(3, -18)$이다.

02-5 답 4

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$를 지나고, 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은
$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $(f'(a)\neq 0)$임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=x^3-3x^2+2x+2$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-3x^2+2x+2$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-6x+2$

STEP 2 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(0, 2)$에서의 접선의 기울기 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(0, 2)$에서의 접선의 기울기는
$f'(0)=2$

STEP 3 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(0, 2)$에서의 접선과 수직인 직선의 방정식 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(0, 2)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y=-\frac{1}{2}x+2$

STEP 4 x절편 구하기

$y=-\frac{1}{2}x+2$에 $y=0$을 대입하면 $x=4$
따라서 구하는 접선의 x절편은 4이다.

02-6 답 -12

해결전략 | 주어진 극한식에서 $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용한다.

STEP 1 $f(1)$, $f'(1)$의 값 구하기

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x-1}=3$에서 $x\longrightarrow 1$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.
즉, $\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)+1\}=0$이므로 $f(1)=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$

STEP 2 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식 구하기

점 $(1, f(1))$, 즉 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기가 3이므로 접선의 방정식은
$y-(-1)=3(x-1)$ $\therefore y=3x-4$

STEP 3 ab의 값 구하기

따라서 $a=3$, $b=-4$이므로
$ab=3\times(-4)=-12$

필수유형 03 117쪽

03-1 답 $(2, -2)$

해결전략 | 곡선과 접선이 만나는 점의 x좌표는 곡선과 접선의 방정식을 연립하여 얻은 방정식의 해와 같음을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=x^3-3x-4$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-3x-4$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-3$

STEP 2 점 $\mathrm{P}(-1, -2)$에서의 접선의 방정식 구하기

$f'(-1)=3-3=0$이므로
점 $\mathrm{P}(-1, -2)$에서의 접선의 방정식은
$y-(-2)=0\times\{x-(-1)\}$ $\therefore y=-2$

STEP 3 점 $\mathrm{P}(-1, -2)$에서의 접선이 이 곡선과 다시 만나는 점의 좌표 구하기

직선 $y=-2$가 곡선 $y=x^3-3x-4$와 만나는 점의 x좌표는 $-2=x^3-3x-4$에서

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2, -2)$이다.

03-2 답 17

해결전략 | 곡선과 접선이 만나는 점의 x좌표는 곡선과 접선의 방정식을 연립하여 얻은 방정식의 해와 같음을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=-x^3+2x^2-1$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=-x^3+2x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+4x$

STEP 2 점 $\mathrm{A}(2, -1)$에서의 접선의 방정식 구하기

$f'(2)=-12+8=-4$이므로 점 $\mathrm{A}(2, -1)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-1)=-4(x-2)$ $\therefore y=-4x+7$

STEP 3 점 $\mathrm{A}(2, -1)$에서의 접선이 이 곡선과 다시 만나는 점의 좌표 구하기

직선 $y=-4x+7$이 곡선 $y=-x^3+2x^2-1$과 만나는 점의 x좌표는 $-4x+7=-x^3+2x^2-1$에서

$x^3-2x^2-4x+8=0$, $(x-2)^2(x+2)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-2$

$x=-2$를 $y=-4x+7$에 대입하면

$y=8+7=15$

즉, 구하는 점의 좌표는 $(-2, 15)$이다.

STEP 4 $b-a$의 값 구하기

따라서 $a=-2$, $b=15$이므로

$b-a=15-(-2)=17$

03-3 답 $y=-5x+9$

해결전략 | 곡선과 접선이 만나는 점의 x좌표는 곡선과 접선의 방정식을 연립하여 얻은 방정식의 해와 같음을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=-x^3+2x^2-x+1$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=-x^3+2x^2-x+1$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+4x-1$

STEP 2 점 $\mathrm{A}(0, 1)$에서의 접선의 방정식 구하기

$f'(0)=-1$이므로 점 $\mathrm{A}(0, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y=-x+1$

STEP 3 점 $\mathrm{A}(0, 1)$에서의 접선이 이 곡선과 다시 만나는 점의 좌표 구하기

직선 $y=-x+1$이 곡선 $y=-x^3+2x^2-x+1$과 만나는 점의 x좌표는 $-x+1=-x^3+2x^2-x+1$에서

$x^3-2x^2=0$, $x^2(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$x=2$를 $y=-x+1$에 대입하면

$y=-2+1=-1$

즉, 점 B의 좌표는 $(2, -1)$이다.

STEP 4 점 $\mathrm{B}(2, -1)$에서의 접선의 방정식 구하기

$f'(2)=-12+8-1=-5$이므로 점 $\mathrm{B}(2, -1)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-1)=-5(x-2)$ $\therefore y=-5x+9$

03-4 답 $3\sqrt{5}$

해결전략 | 곡선과 접선이 만나는 점의 x좌표는 곡선과 접선의 방정식을 연립하여 얻은 방정식의 해와 같음을 이용하여 점 B의 좌표를 구한 후 두 점 A, B 사이의 거리를 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^3-5x$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-5x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-5$

STEP 2 점 $\mathrm{A}(1, -4)$에서의 접선의 방정식 구하기

$f'(1)=3-5=-2$이므로 점 $\mathrm{A}(1, -4)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-4)=-2(x-1)$ $\therefore y=-2x-2$

STEP 3 점 $\mathrm{A}(1, -4)$에서의 접선이 이 곡선과 다시 만나는 점의 좌표 구하기

직선 $y=-2x-2$가 곡선 $y=x^3-5x$와 만나는 점의 x좌표는 $-2x-2=x^3-5x$에서

$x^3-3x+2=0$, $(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

$x=-2$를 $y=-2x-2$에 대입하면

$y=-2\times(-2)-2=2$

즉, 점 B의 좌표는 $(-2, 2)$이다.

STEP 4 선분 AB의 길이 구하기

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-1)^2+\{2-(-4)\}^2}=3\sqrt{5}$

03-5 답 1:8

해결전략 | 곡선과 접선이 만나는 점의 x좌표는 곡선과 접선의 방정식을 연립하여 얻은 방정식의 해와 같음을 이용하여 구하고 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는 접선의 방정식에 $y=0$을 대입하여 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^3$으로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2$

STEP 2 점 $\mathrm{P}(1, 1)$에서의 접선의 방정식 구하기

$f'(1)=3$이므로 점 $P(1, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=3(x-1)$ $\therefore y=3x-2$

STEP 3 점 Q의 좌표 구하기

$y=3x-2$에 $y=0$을 대입하면 $x=\frac{2}{3}$이므로 접선이 x축과 만나는 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$이다.

STEP 4 점 R의 좌표 구하기

직선 $y=3x-2$가 곡선 $y=x^3$과 만나는 점의 x좌표는

$3x-2=x^3$에서

$x^3-3x+2=0$, $(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

$x=-2$를 $y=3x-2$에 대입하면

$y=-6-2=-8$

즉, 점 R의 좌표는 $(-2, -8)$이다.

STEP 5 $\overline{PQ}:\overline{QR}$ 구하기

$\overline{PQ}=\sqrt{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+(1-0)^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}$

$\overline{QR}=\sqrt{\left(-2-\frac{2}{3}\right)^2+(-8-0)^2}=\frac{8\sqrt{10}}{3}$

$\therefore \overline{PQ}:\overline{QR}=\frac{\sqrt{10}}{3}:\frac{8\sqrt{10}}{3}=1:8$

03-6 답 20

해결전략 | 곡선과 접선이 만나는 점의 x좌표는 곡선과 접선의 방정식을 연립하여 얻은 방정식의 해와 같음을 이용하여 구하고 $n=2, 4, 6, 8, 10$을 대입하여 $x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}$을 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^3-nx^2+x$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-nx^2+x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2nx+1$

STEP 2 점 $(1, 2-n)$에서의 접선의 방정식 구하기

$f'(1)=3-2n+1=-2n+4$이므로

점 $(1, 2-n)$에서의 접선의 방정식은

$y-(2-n)=(-2n+4)(x-1)$

$\therefore y=(4-2n)x+n-2$

STEP 3 점 $(1, 2-n)$에서의 접선이 이 곡선과 다시 만나는 점의 x좌표 구하기

직선 $y=(4-2n)x+n-2$가 곡선 $y=x^3-nx^2+x$와 만나는 점의 x좌표는 $(4-2n)x+n-2=x^3-nx^2+x$에서

$x^3-nx^2+(2n-3)x+2-n=0$

$(x-1)^2(x+2-n)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=n-2$

STEP 4 $x_2+x_4+x_6+x_8+x_{10}$의 값 구하기

따라서 $x_n=n-2$이므로

$x_2+x_4+x_6+x_8+x_{10}=0+2+4+6+8=20$

필수유형 04 119쪽

04-1 답 $a=1, b=2$

해결전략 | 평행한 두 직선의 기울기는 같음을 이용하여 접선의 기울기를 구한 후 접점의 좌표를 찾아 접선의 방정식을 구한다.

STEP 1 접선의 기울기 구하기

직선 $y=-x+1$에 평행한 직선의 기울기는 -1이므로 기울기가 -1인 접선을 구한다.

STEP 2 접점의 좌표를 (a, a^2-a+2)라 하고 a의 값 구하기

$f(x)=x^2-x+2$로 놓으면

$f'(x)=2x-1$

접점의 좌표를 (a, a^2-a+2)라고 하면 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(a)=2a-1=-1$

$\therefore a=0$

STEP 3 접선의 방정식 구하기

$a=0$일 때, 접점의 좌표는 $(0, 2)$이므로 접선의 방정식은

$y-2=-(x-0)$ $\therefore y=-x+2$

곡선 $y=x^2-x+2$에 접하고 직선 $y=-x+1$에 평행한 직선의 방정식은 $y=-x+2$, 즉 $x+y=2$이므로

$a=1, b=2$

04-2 답 -1

해결전략 | 접점의 좌표를 이용하여 나타낸 접선의 방정식이 주어진 직선과 일치함을 이용하여 미지수를 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^3+2x^2+ax$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3+2x^2+ax$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+4x+a$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^3+2t^2+at)라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 (t, t^3+2t^2+at)라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+4t+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t^2+at)=(3t^2+4t+a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+4t+a)x-2t^3-2t^2$ ····· ㉠

STEP 3 t의 값 구하기

㉠이 직선 $y=3x+8$과 일치해야 하므로

$3t^2+4t+a=3$ …… ㉡

$-2t^3-2t^2=8$ …… ㉢

㉢에서 $t^3+t^2+4=0$, $(t+2)(t^2-t+2)=0$

$\therefore t=-2$ ($\because t^2-t+2>0$)

STEP 4 a의 값 구하기

$t=-2$를 ㉡에 대입하면

$12-8+a=3$ $\therefore a=-1$

04-3 답 2

해결전략 | 접선의 방정식이 주어진 직선과 일치함을 이용하여 미지수를 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^2-6x+a$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^2-6x+a$로 놓으면

$f'(x)=2x-6$

STEP 2 t의 값 구하기

$x=t$인 점에서의 접선의 기울기가 -4이므로

$f'(t)=2t-6=-4$

$\therefore t=1$

STEP 3 a의 값 구하기

접점의 좌표가 $(1, -3)$이므로 $x=1$, $y=-3$을 $y=x^2-6x+a$에 대입하면

$-3=1-6+a$ $\therefore a=2$

$\therefore at=2\times1=2$

04-4 답 $y=-x+\frac{5}{4}$

해결전략 | 접점의 좌표를 $(a, -a^2+1)$이라 하고, 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기가 접선의 기울기와 같음을 이용하여 a의 값을 구한다.

STEP 1 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기 구하기

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-3-0}{2-(-1)}=-1$

STEP 2 접점의 좌표를 $(a, -a^2+1)$이라 하고 a의 값 구하기

$f(x)=-x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=-2x$

접점의 좌표를 $(a, -a^2+1)$이라고 하면 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(a)=-2a=-1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

STEP 3 접선의 방정식 구하기

$a=\frac{1}{2}$일 때, 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$이므로 접선의 방정식은 $y-\frac{3}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore y=-x+\frac{5}{4}$

04-5 답 15

해결전략 | 서로 평행한 두 직선의 기울기는 같음을 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^3-2x+1$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-2x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2$

STEP 2 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3-2=1$

STEP 3 $g(x)=-x^2-7x$로 놓고 $g'(x)$ 구하기

$g(x)=-x^2-7x$로 놓으면

$g'(x)=-2x-7$

STEP 4 $n-m$의 값 구하기

이때 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t, -t^2-7t)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선과 평행하므로 $g'(t)=f'(-1)$

즉, $-2t-7=1$에서 $2t=-8$ $\therefore t=-4$

따라서 접점의 좌표는 $(-4, 12)$, 접선의 기울기는 $g'(4)=f'(-1)=1$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-12=x-(-4)$ $\therefore y=x+16$

따라서 $m=1$, $n=16$이므로

$n-m=16-1=15$

04-6 답 $2\sqrt{2}$

해결전략 | 주어진 직선과 기울기가 같아지는 두 개의 접선의 접점의 좌표를 구한다.

STEP 1 직선 $x+y-5=0$과 기울기가 같은 접선의 접점의 x좌표 구하기

직선 $x+y-5=0$에서 $y=-x+5$이므로 직선의 기울기는 -1이다.

$f(x)=-x^3+2x+2$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+2$

접점의 x좌표를 a로 놓으면 $f'(a)=-1$이므로

$-3a^2+2=-1$

$-3a^2=-3$, $a^2=1$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

STEP 2 접선의 방정식 구하기

(i) $a=-1$일 때, 접점의 좌표는 $(-1, 1)$이므로 접선의

방정식은

$y-1=-\{x-(-1)\}$ $\therefore x+y=0$

(ii) $a=1$일 때, 접점의 좌표는 $(1, 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=-(x-1)$ $\therefore x+y-4=0$

STEP 3 두 직선 사이의 거리 구하기

따라서 두 직선 사이의 거리는 점 $(1, -1)$ ($x+y=0$ 위의 점)과 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1-1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

필수유형 05 121쪽

05-1 답 $y=x-4$, $y=x+4$

해결전략 | x축의 양의 방향과 45°의 각을 이루는 접선의 기울기는 $\tan 45^\circ$임을 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

STEP 1 $f(x)=2x^3-5x$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=2x^3-5x$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-5$

STEP 2 접점의 좌표를 $(a, 2a^3-5a)$라 하고 a의 값 구하기

접점의 좌표를 $(a, 2a^3-5a)$라고 하면

접선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$이므로

$f'(a)=6a^2-5=1$, $a^2=1$

$\therefore a=1$ 또는 $a=-1$

STEP 3 접선의 방정식 구하기

(i) $a=1$일 때, 접점의 좌표는 $(1, -3)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-3)=x-1$ $\therefore y=x-4$

(ii) $a=-1$일 때, 접점의 좌표는 $(-1, 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=x-(-1)$ $\therefore y=x+4$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=x-4$, $y=x+4$

05-2 답 $\frac{6\sqrt{17}}{17}$

해결전략 | 직선과 평행한 접선의 접점과 직선 사이의 거리가 구하는 최솟값임을 이용한다.

STEP 1 직선 $y=4x-10$과 평행한 접선의 접점의 x좌표 구하기

$f(x)=x^2$으로 놓으면

$f'(x)=2x$

직선 $y=4x-10$과 평행한 곡선 $y=f(x)$의 접선의 접점의 좌표를 (a, a^2)이라고 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(a)=2a=4$ $\therefore a=2$

STEP 2 곡선 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값 구하기

$a=2$일 때, 접점의 좌표는 $(2, 4)$이고 점 $(2, 4)$와 직선 $y=4x-10$, 즉 $4x-y-10=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$$\frac{|8-4-10|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{17}}{17}$$

05-3 답 $y=-2x-4$

해결전략 | 접선의 기울기가 최소이면 $f'(x)$가 최솟값을 가질 때임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=x^3-6x^2+10x-12$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-6x^2+10x-12$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+10$

STEP 2 $f'(x)$의 최솟값과 그때의 x의 값 구하기

$f'(x)=3x^2-12x+10=3(x-2)^2-2$이므로

$f'(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

즉, 곡선 $y=x^3-6x^2+10x-12$의 접선의 기울기의 최솟값은 -2이고 이때의 접점의 x좌표는 2이다.

STEP 3 접선의 방정식 구하기

따라서 점 $(2, -8)$을 지나고 기울기가 -2인 접선의 방정식은

$y+8=-2(x-2)$

$\therefore y=-2x-4$

05-4 답 $6\sqrt{3}$

해결전략 | 곡선과 직선이 제1사분면에서 접할 때, 점점의 x좌표, y좌표는 양수임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=x^3+k$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^3+k)라 하고 접선의 기울기 구하기

접점의 좌표를 (t, t^3+k)라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로

$3t^2=9$, $t^2=3$

$\therefore t=\sqrt{3}$ 또는 $t=-\sqrt{3}$

STEP 3 k의 값 구하기

곡선 $y=x^3+k$와 직선 $y=9x$가 제1사분면에서 접하므로 접점의 좌표는 $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}+k)$

점 $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}+k)$가 직선 $y=9x$ 위에 있으므로

$3\sqrt{3}+k=9\sqrt{3}$

$\therefore k=6\sqrt{3}$

05-5 답 -2

해결전략 | 접선의 기울기가 최대이면 $f'(x)$가 최댓값을 가질 때임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=-2x^3-6x^2-3x+4$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=-2x^3-6x^2-3x+4$로 놓으면

$f'(x)=-6x^2-12x-3$

STEP 2 $f'(x)$의 최댓값과 그때의 x의 값 구하기

$f'(x)=-6x^2-12x-3=-6(x+1)^2+3$이므로

$f'(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 3을 갖는다.

즉, 곡선 $y=-2x^3-6x^2-3x+4$의 접선의 기울기의 최댓값은 3이고 이때의 접점의 x좌표는 -1이다.

STEP 3 접선의 방정식 구하기

따라서 점 $(-1, 3)$을 지나고 기울기가 3인 접선의 방정식은 ($f(-1)=2-6+3+4=3$)

$y-3=3(x+1)$ $\therefore y=3x+6$

STEP 4 x절편 구하기

$y=3x+6$에 $y=0$을 대입하면 $x=-2$

따라서 구하는 접선의 x절편은 -2이다.

05-6 답 3

해결전략 | 직선 AB와 점 P 사이의 거리가 최소일 때, 삼각형 ABP의 넓이가 최소임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=x^2+5x+8$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^2+5x+8$로 놓으면

$f'(x)=2x+5$

STEP 2 직선 AB의 방정식 구하기

직선 AB의 기울기는 $\frac{2-(-4)}{-4-2}=-1$이므로

직선 AB의 방정식은

$y-(-4)=-(x-2)$ $\therefore x+y+2=0$

STEP 3 점 P의 좌표 구하기

직선 AB와 평행한 접선의 접점의 좌표를 (t, t^2+5t+8)이라고 하면

$f'(t)=2t+5=-1$ $\therefore t=-3$

즉, 점 P의 좌표가 $P(-3, 2)$일 때 삼각형 ABP의 넓이가 최소이다.

STEP 4 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값 구하기

직선 AB와 점 P 사이의 거리는

$\frac{|-3+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-4-2)^2+\{2-(-4)\}^2}=6\sqrt{2}$이므로

삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$

필수유형 06 123쪽

06-1 답 9

해결전략 | 접점의 좌표를 미지수로 놓고 그 점에서의 접선의 방정식을 세운다. 이때 y절편은 $x=0$일 때 y의 값이다.

STEP 1 $f(x)=x^3-7$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-7$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^3-7)이라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 (t, t^3-7)이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-7)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3-7$ …… ㉠

STEP 3 t의 값 구하기

이 직선이 점 $(0, 9)$를 지나므로

$9=-2t^3-7$

$t^3+8=0$, $(t+2)(t^2-2t+4)=0$

$\therefore t=-2$ ($\because t^2-2t+4>0$)

STEP 4 접선의 y절편 구하기

$t=-2$를 ㉠에 대입하면 $y=12x+9$

따라서 구하는 접선의 y절편은 9이다.

06-2 답 -4

해결전략 | 접점의 좌표를 미지수로 놓고 그 점에서의 접선의 방정식을 세운다.

STEP 1 $f(x)=x^2+x$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^2+x$로 놓으면 $f'(x)=2x+1$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^2+t)라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 (t, t^2+t)라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$

$\therefore y=(2t+1)x-t^2$ …… ㉠

STEP 3 t의 값 구하기

이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1=2t+1-t^2$

$t^2-2t=0$, $t(t-2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$

STEP 4 두 접선의 y절편의 합 구하기

$t=0$, $t=2$를 각각 ㉠에 대입하면

$y=x$, $y=5x-4$

따라서 두 접선의 y절편은 각각 0, -4이므로 구하는 합은

$0+(-4)=-4$

06-3 답 $-\frac{45}{4}$

해결전략 | 접점의 좌표를 미지수로 놓고 그 점에서의 접선의 방정식을 세운다.

STEP 1 $f(x)=x^3-3x^2+2$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-3x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2)라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2)라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+2)=(3t^2-6t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+2$

STEP 3 t의 값 구하기

이 직선이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=-2t^3+3t^2+2$

$2t^3-3t^2+1=0$, $(t-1)^2(2t+1)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$

STEP 4 두 접선의 기울기의 곱 구하기

$t=1$, $t=-\frac{1}{2}$을 각각 $f'(t)=3t^2-6t$에 대입하면

$f'(1)=3-6=-3$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+3=\frac{15}{4}$

따라서 두 접선의 기울기는 각각 -3, $\frac{15}{4}$이므로 구하는 곱은 $(-3)\times\frac{15}{4}=-\frac{45}{4}$

06-4 답 $\frac{4}{3}$

해결전략 | 접점의 좌표를 미지수로 놓고 그 점에서의 접선의 방정식을 세운다.

STEP 1 $f(x)=x^3-2$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^3-2)라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 (t, t^3-2)라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3-2$ ····· ㉠

STEP 3 t의 값 구하기

이 직선이 점 $(0, -4)$를 지나므로

$-4=-2t^3-2$

$t^3-1=0$, $(t-1)(t^2+t+1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t^2+t+1>0$)

STEP 4 a의 값 구하기

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$y=3x-4$

$y=3x-4$에 $y=0$을 대입하면

$3x-4=0$ $\therefore x=\frac{4}{3}$

따라서 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $\frac{4}{3}$이다.

06-5 답 $\frac{1}{2}$

해결전략 | 두 접선이 서로 수직으로 만나면 두 접선의 기울기의 곱이 -1임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+k$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=x$

STEP 2 접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{2}t^2+k\right)$라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{2}t^2+k\right)$라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=t$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{2}t^2+k\right)=t(x-t)$ $\therefore y=tx-\frac{1}{2}t^2+k$

STEP 3 접선이 지나는 점을 이용하여 관계식 세우기

이 직선이 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=2t-\frac{1}{2}t^2+k$

$\therefore t^2-4t-2k=0$ ····· ㉠

STEP 4 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 k의 값 구하기

이차방정식 ㉠의 두 실근을 각각 t_1, t_2라고 하면

$x=t_1$, $x=t_2$에서의 접선의 기울기는 각각 $f'(t_1)=t_1$, $f'(t_2)=t_2$이고 두 접선이 서로 수직으로 만나므로

$t_1t_2=-1$

이때 t_1, t_2는 t에 대한 이차방정식 ㉠의 해이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1t_2=-2k=-1$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

06-6 답 $-\frac{3}{2}$

해결전략 | 접점의 좌표를 미지수로 놓고 그 점에서의 접선의 방정식을 세운다.

STEP 1 $f(x)=x^3+3x^2+2x$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3+3x^2+2x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+6x+2$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^3+3t^2+2t)라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 (t, t^3+3t^2+2t)라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+6t+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+3t^2+2t)=(3t^2+6t+2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+6t+2)x-2t^3-3t^2$

STEP 3 접선이 지나는 점을 이용하여 관계식 세우기

이 직선이 점 $(0, a)$를 지나므로

$-2t^3-3t^2=a \quad \therefore 2t^3+3t^2+a=0$

STEP 4 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 세 접점의 x좌표의 합 구하기

삼차방정식 $2t^3+3t^2+a=0$이 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근이 세 접점의 x좌표이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 x좌표의 합은 $-\frac{3}{2}$이다.

> 풍쌤의 비법
>
> **삼차방정식의 근과 계수의 관계**
>
> 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면
>
> ① $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$
>
> ② $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$
>
> ③ $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

필수유형 07 125쪽

07-1 답 16

해결전략 | 접점의 좌표를 (t, t^2+2)로 놓고 세운 접선의 방정식에 $A(1, -1)$을 대입하여 t의 값을 구한 후 두 접점의 좌표를 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^2+2$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=2x$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^2+2)라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 (t, t^2+2)라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+2)=2t(x-t) \quad \therefore y=2tx-t^2+2$

STEP 3 t의 값 구하기

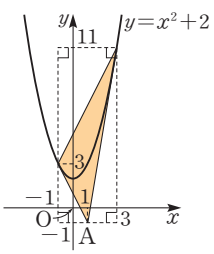
이 직선이 점 $A(1, -1)$을 지나므로

$-1=2t-t^2+2$

$t^2-2t-3=0, (t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

STEP 4 삼각형 ABC의 넓이 구하기



따라서 접점의 좌표는 $(-1, 3), (3, 11)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$4\times12-\left(\frac{1}{2}\times2\times4+\frac{1}{2}\times2\times12+\frac{1}{2}\times4\times8\right)=16$

◉→ 다른 풀이

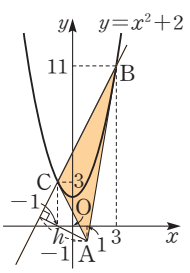
STEP 4 삼각형 ABC의 넓이 구하기

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 3), (3, 11)$이므로

$B(3, 11), C(-1, 3)$이라고 하면

$\overline{BC}=\sqrt{(-1-3)^2+(3-11)^2}$

$=4\sqrt{5}$



직선 BC의 방정식은

$y-11=\frac{3-11}{-1-3}(x-3)$

$\therefore 2x-y+5=0$

점 $A(1, -1)$과 직선 BC 사이의 거리를 h라고 하면

$h=\frac{|2+1+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times\frac{8\sqrt{5}}{5}=16$

> 풍쌤의 비법
>
> 점 A에서 직선 BC에 수선을 그으면 그 수선의 길이가 $\overline{BC}$를 밑변으로 하는 삼각형 ABC의 높이가 된다.

07-2 답 $4\sqrt{5}$

해결전략 I 접점의 좌표를 미지수로 놓고 그 점에서의 접선의 방정식을 세운다.

STEP 1 $f(x)=x^2-2x+1$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^2-2x+1$로 놓으면

$f'(x)=2x-2$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^2-2t+1)이라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 (t, t^2-2t+1)이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-2t+1)=(2t-2)(x-t)$

$\therefore y=(2t-2)x-t^2+1$

STEP 3 t의 값 구하기

이 직선이 점 $\mathrm{A}(0, -3)$을 지나므로

$-3=-t^2+1$

$t^2=4 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=2$

STEP 4 선분 BC의 길이 구하기

따라서 접점의 좌표는 $(-2, 9)$, $(2, 1)$이므로 선분 BC의 길이는

$\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(1-9)^2}=4\sqrt{5}$

07-3 답 2

해결전략 I 접점의 좌표를 (t, t^2+1)로 놓고 세운 접선의 방정식에 원점을 대입하여 t의 값을 구한 후 두 접점의 좌표를 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^2+1$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=2x$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^2+1)이라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 (t, t^2+1)이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+1)=2t(x-t) \quad \therefore y=2tx-t^2+1$

STEP 3 t의 값 구하기

이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=-t^2+1$

$t^2=1 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$

STEP 4 삼각형의 넓이 구하기

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 2)$, $(1, 2)$이므로 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

07-4 답 5

해결전략 I 곡선 밖의 한 점과 곡선에 그은 두 접선의 접점으로 이루어진 삼각형의 무게중심을 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^2+5x-2$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^2+5x-2$로 놓으면

$f'(x)=2x+5$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^2+5t-2)라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 (t, t^2+5t-2)라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+5$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+5t-2)=(2t+5)(x-t)$

$\therefore y=(2t+5)x-t^2-2$

STEP 3 접선이 지나는 점을 이용하여 관계식 구하기

이 직선이 점 $\mathrm{A}(a, 3)$을 지나므로

$3=(2t+5)a-t^2-2$

$\therefore t^2-2at-5a+5=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

STEP 4 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 관계식 구하기

이때 t_1, t_2를 t에 대한 이차방정식 ㉠의 해라고 하면 t_1, t_2는 각각 접점의 x좌표이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1+t_2=2a$

STEP 5 a의 값 구하기

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표는

$\frac{a+t_1+t_2}{3}=\frac{a+2a}{3}=5$이므로

$a=5$

07-5 답 $3\sqrt{2}$

해결전략 I 곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하고, 이 접선이 다시 곡선과 만나는 점의 좌표를 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^3-4x$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-4x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-4$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^3-4t)라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 (t, t^3-4t)라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-4t)=(3t^2-4)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-4)x-2t^3$

STEP 3 점 A의 좌표와 접선의 방정식 구하기

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-2t^3$, $t^3+1=0$, $(t+1)(t^2-t+1)=0$

$\therefore t=-1$ ($\because t^2-t+1>0$)

즉, 점 A의 좌표는 $(-1, 3)$이고 접선의 방정식은

$y=-x+2$이다.

STEP 4 선분 AB의 길이 구하기

직선 $y=-x+2$가 곡선 $y=x^3-4x$와 만나는 점의 x좌표는

$-x+2=x^3-4x$에서

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$x=2$를 $y=-x+2$에 대입하면 $y=0$

즉, 점 B의 좌표는 $(2, 0)$이므로 선분 AB의 길이는

$\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2}$

07-6 답 $\frac{16}{9}$

해결전략 | 접선이 오직 한 개 존재하면 접점도 오직 한 개 존재함을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=x^3-4x^2+1$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-4x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-8x$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^3-4t^2+1)이라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 (t, t^3-4t^2+1)이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-8t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-4t^2+1)=(3t^2-8t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-8t)x-2t^3+4t^2+1$

STEP 3 접선이 지나는 점을 이용하여 관계식 구하기

이 직선이 점 $(a, 1)$을 지나므로

$1=(3t^2-8t)a-2t^3+4t^2+1$

$t\{2t^2-(4+3a)t+8a\}=0$

$\therefore t=0$ 또는 $2t^2-(4+3a)t+8a=0$

STEP 4 a의 값의 범위 구하기

이때 접선이 오직 한 개 존재하려면 이차방정식 $2t^2-(4+3a)t+8a=0$이 $t=0$을 중근으로 갖거나 실근을 갖지 않아야 한다.

그런데 $t=0$을 중근으로 가지려면 $4+3a=0$, $8a=0$이어야 하는데 이를 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

즉, t에 대한 이차방정식 $2t^2-(4+3a)t+8a=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(4+3a)^2-4\times2\times8a<0$

$9a^2-40a+16<0$, $(9a-4)(a-4)<0$

$\therefore \frac{4}{9}<a<4$

따라서 $m=\frac{4}{9}$, $n=4$이므로

$mn=\frac{4}{9}\times4=\frac{16}{9}$

필수유형 08 127쪽

08-1 답 $y=2x+2$

해결전략 | 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 (a, b)에서 공통인 접선을 가지면 $f(a)=g(a)=b$, $f'(a)=g'(a)$임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=x^3-x$, $g(x)=-x^2+1$로 놓고 $f'(x)$, $g'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-x$, $g(x)=-x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-1$, $g'(x)=-2x$

STEP 2 두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하고 t의 값 구하기

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^3-t=-t^2+1$

$t^3+t^2-t-1=0$, $(t-1)(t+1)^2=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=-1$

$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2-1=-2t$

$3t^2+2t-1=0$, $(3t-1)(t+1)=0$

$\therefore t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=-1$

STEP 3 공통인 접선의 방정식 구하기

따라서 $t=-1$일 때, 즉 점 $(-1, 0)$에서 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(-1)=g'(-1)=2$이므로 공통인 접선의 방정식은

$y-0=2\{x-(-1)\}$ $\therefore y=2x+2$

08-2 답 -1

해결전략 | 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 (a, b)에서 공통인 접선을 가지면 $f(a)=g(a)=b$, $f'(a)=g'(a)$임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=x^3+ax+2$, $g(x)=x^2+1$로 놓고 $f'(x)$, $g'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3+ax+2$, $g(x)=x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2x$

STEP 2 두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하고 t의 값 구하기

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면
$f(t)=g(t)$에서
$t^3+at+2=t^2+1$ …… ㉠
$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2+a=2t$
$\therefore a=2t-3t^2$
이를 ㉠에 대입하여 정리하면
$2t^3-t^2-1=0$, $(t-1)(2t^2+t+1)=0$
$\therefore t=1$ ($\because 2t^2+t+1>0$)
STEP 3 a의 값 구하기
$t=1$을 $a=2t-3t^2$에 대입하면 $a=-1$

08-3 답 −7

해결전략 | 주어진 접선이 곡선 $y=x^3+ax-2$의 접선임을 이용한다.
STEP 1 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-2, 4)$에서의 접선의 방정식 구하기
$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 점 $(-2, 4)$에서의 접선의 기울기는 $2\times(-2)=-4$
따라서 점 $(-2, 4)$에서의 접선의 방정식은
$y-4=-4\{x-(-2)\}$ $\therefore y=-4x-4$
STEP 2 직선 $y=-4x+4$가 $x=t$인 점에서 곡선 $y=x^3+ax-2$에 접한다고 하고 t의 값 구하기
직선 $y=-4x+4$가 $x=t$인 점에서 곡선 $y=x^3+ax-2$에 접한다고 하면
$t^3+at-2=-4t-4$
$\therefore t^3+(a+4)t+2=0$ …… ㉠
$y=x^3+ax-2$에서 $y'=3x^2+a$이므로
$3t^2+a=-4$
$\therefore a+4=-3t^2$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $t^3-3t^3+2=0$
$t^3-1=0$, $(t-1)(t^2+t+1)=0$
$\therefore t=1$ ($\because t^2+t+1>0$)
STEP 3 a의 값 구하기
$t=1$을 ㉡에 대입하면 $a+4=-3$
$\therefore a=-7$

08-4 답 1

해결전략 | 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 (a, b)에서 공통인 접선을 가지면 $f(a)=g(a)=b$, $f'(a)=g'(a)$임을 이용한다.
STEP 1 $f(x)=ax^3+6x$, $g(x)=2x^2+bx$로 놓고 $f'(x)$, $g'(x)$ 구하기
$f(x)=ax^3+6x$, $g(x)=2x^2+bx$로 놓으면
$f'(x)=3ax^2+6$, $g'(x)=4x+b$
STEP 2 $x=3$에서 공통인 접선을 가짐을 이용하여 관계식 세우기
두 곡선이 $x=3$인 점에서 공통인 접선을 가지므로
$f(3)=g(3)$에서 $27a+18=18+3b$
$\therefore 9a-b=0$ …… ㉠
$f'(3)=g'(3)$에서 $27a+6=12+b$
$\therefore 27a-b=6$ …… ㉡
STEP 3 a, b의 값 구하기
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3}$, $b=3$
$\therefore ab=\frac{1}{3}\times 3=1$

08-5 답 −14

해결전략 | 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 (a, b)에서 공통인 접선을 가지면 $f(a)=g(a)=b$, $f'(a)=g'(a)$임을 이용한다.
STEP 1 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=-x^2+c$로 놓고 $f'(x)$, $g'(x)$ 구하기
$f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=-x^2+c$로 놓으면
$f'(x)=2x+a$, $g'(x)=-2x$
STEP 2 두 곡선이 점 $(1, 3)$을 지남을 이용하여 c의 값 구하기
두 곡선이 점 $(1, 3)$을 지나므로
$f(1)=3$에서 $1+a+b=3$
$\therefore a+b=2$ …… ㉠
$g(1)=3$에서 $-1+c=3$
$\therefore c=4$
STEP 3 점 $(1, 3)$에서 두 곡선에 그은 접선의 기울기가 같음을 이용하여 a, b의 값 구하기
점 $(1, 3)$에서 두 곡선에 그은 접선의 기울기가 같으므로
$f'(1)=g'(1)$에서 $2+a=-2$
$\therefore a=-4$
$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $-4+b=2$
$\therefore b=6$
STEP 4 $a-b-c$의 값 구하기
$\therefore a-b-c=-4-6-4=-14$

08-6 답 −8

해결전략 | 점 P의 x좌표, y좌표가 모두 양수임을 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^3$, $g(x)=-x^2+5x+k$로 놓고 $f'(x)$, $g'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3$, $g(x)=-x^2+5x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=-2x+5$

STEP 2 두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하고 t의 값 구하기

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서

$t^3=-t^2+5t+k$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2=-2t+5$

$3t^2+2t-5=0$, $(t-1)(3t+5)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t>0$)

STEP 3 k의 값 구하기

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$1=-1+5+k$ $\therefore k=-3$

STEP 4 점 P에서의 접선의 방정식 구하기

점 P의 좌표는 $(1, 1)$이고 접선의 기울기는 3이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-1=3(x-1)$ $\therefore y=3x-2$

STEP 5 $k-a+b$의 값 구하기

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로

$k-a+b=-3-3+(-2)=-8$

필수유형 09 129쪽

09-1 답 $\frac{4}{3}$

해결전략 | 각 곡선에 그은 접선이 서로 수직일 때, 두 접선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+1$, $g(x)=-x^2+x+a$로 놓고 $f'(x)$, $g'(x)$ 구하기

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+1$, $g(x)=-x^2+x+a$로 놓으면

$f'(x)=x^2$, $g'(x)=-2x+1$

STEP 2 두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하고 관계식 구하기

두 곡선의 교점의 x좌표를 t라고 하면

$f(t)=g(t)$에서

$\frac{1}{3}t^3+1=-t^2+t+a$ …… ㉠

STEP 3 $x=t$인 점에서 각 곡선에 그은 접선이 서로 수직임을 이용하여 t의 값 구하기

$x=t$인 점에서 각 곡선에 그은 접선이 서로 수직이므로

$f'(t)g'(t)=-1$에서

$t^2(-2t+1)=-1$

$2t^3-t^2-1=0$, $(t-1)(2t^2+t+1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because 2t^2+t+1>0$)

STEP 4 a의 값 구하기

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{3}+1=-1+1+a$ $\therefore a=\frac{4}{3}$

09-2 답 $\frac{26}{3}$

해결전략 | 각 곡선에 그은 접선이 서로 수직일 때, 두 접선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$, $g'(x)$ 구하기

$f(x)=x^2+4$, $g(x)=-3x^2+ax$에서

$f'(x)=2x$, $g'(x)=-6x+a$

STEP 2 두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하고 관계식 구하기

두 곡선의 교점의 x좌표를 t라고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^2+4=-3t^2+at$

$\therefore at=4t^2+4$ …… ㉠

STEP 3 $x=t$인 점에서 각 곡선에 그은 접선이 서로 수직임을 이용하여 t의 값 구하기

$x=t$인 점에서 각 곡선에 그은 접선이 서로 수직이므로

$f'(t)g'(t)=-1$에서 $2t(-6t+a)=-1$

$-12t^2+2at=-1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-12t^2+2(4t^2+4)=-1$

$4t^2=9$ $\therefore t=-\frac{3}{2}$ 또는 $t=\frac{3}{2}$

STEP 4 양수 a의 값 구하기

(i) $t=-\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면

$-\frac{3}{2}a=13$ $\therefore a=-\frac{26}{3}$

(ii) $t=\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{2}a=13$ $\therefore a=\frac{26}{3}$

따라서 구하는 양수 a의 값은 $\frac{26}{3}$이다.

09-3 답 $-\frac{11}{3}$

해결전략 | 각 곡선에 그은 접선이 서로 수직일 때, 두 접선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=x^3$, $g(x)=ax^2+bx$로 놓고 $f'(x)$, $g'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3$, $g(x)=ax^2+bx$로 놓으면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=2ax+b$

STEP 2 두 곡선이 점 $(1, 1)$에서 만나는 것을 이용하여 관계식 구하기

두 곡선이 점 $(1, 1)$에서 만나므로 $f(1)=g(1)$에서

$1=a+b$ …… ㉠

STEP 3 점 $(1, 1)$에서의 두 접선이 서로 수직임을 이용하여 관계식 구하기

점 $(1, 1)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(1)g'(1)=-1$에서

$3(2a+b)=-1$ …… ㉡

STEP 4 $a-b$의 값 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{7}{3}$

$\therefore a-b=-\frac{4}{3}-\frac{7}{3}=-\frac{11}{3}$

09-4 답 10

해결전략 | 두 곡선의 교점에서의 접선이 서로 수직일 때, 두 접선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=ax^3+b$, $g(x)=x^2+cx$로 놓고 $f'(x)$, $g'(x)$ 구하기

$f(x)=ax^3+b$, $g(x)=x^2+cx$로 놓으면

$f'(x)=3ax^2$, $g'(x)=2x+c$

STEP 2 두 곡선이 점 $(-1, 0)$을 지나는 것을 이용하여 c의 값 구하기

두 곡선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$f(-1)=-a+b=0$ $\therefore b=a$ …… ㉠

$g(-1)=1-c=0$ $\therefore c=1$

STEP 3 점 $(-1, 0)$에서의 두 접선이 서로 수직임을 이용하여 a, b의 값 구하기

점 $(-1, 0)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(-1)g'(-1)=-1$에서

$3a(-2+c)=-1$ …… ㉡

$c=1$을 ㉡에 대입하면

$-3a=-1$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

㉠에서 $b=a=\frac{1}{3}$

STEP 4 $90abc$의 값 구하기

$\therefore 90abc=90\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times1=10$

09-5 답 −2

해결전략 | 두 곡선의 교점의 x좌표를 미지수로 놓고 조건을 이용하여 관계식을 세운다.

STEP 1 $f(x)=-x^2+2$, $g(x)=ax^2+3x$로 놓고 $f'(x)$, $g'(x)$ 구하기

$f(x)=-x^2+2$, $g(x)=ax^2+3x$로 놓으면

$f'(x)=-2x$, $g'(x)=2ax+3$

STEP 2 두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하고 관계식 구하기

두 곡선의 교점의 x좌표를 t라고 하면 $f(t)=g(t)$에서

$-t^2+2=at^2+3t$ …… ㉠

STEP 3 $m_1-m_2=1$임을 이용하여 t의 값 구하기

$m_1=f'(t)=-2t$, $m_2=g'(t)=2at+3$이고

$m_1-m_2=1$이므로

$-2t-2at-3=1$

$\therefore at=-t-2$ …… ㉡

STEP 4 a의 값 구하기

㉡을 ㉠에 대입하면

$-t^2+2=t(-t-2)+3t$ $\therefore t=2$

$t=2$를 ㉡에 대입하면

$2a=-4$ $\therefore a=-2$

09-6 답 −2

해결전략 | 각 곡선에 그은 접선이 서로 수직일 때, 두 접선의 기울기의 곱은 -1임을 이용하여 관계식을 세운다.

STEP 1 $f'(2)g'(2)$의 값 구하기

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(2, k)$에서 만나므로

$f(2)=k$, $g(2)=k$

또, 점 $(2, k)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(2)g'(2)=-1$ …… ㉠

STEP 2 $f'(2)+g'(2)$의 값 구하기

$y=f(x)g(x)$에서 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 점 $(2, k^2)$에서의 접선의 기울기는 0이므로

$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=0$

$k\{f'(2)+g'(2)\}=0$

$\therefore f'(2)+g'(2)=0$ $(\because k\neq0)$

STEP 3 $f'(2)-g'(2)$의 값 구하기

$g'(2)=-f'(2)$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$\{f'(2)\}^2=1$ $\therefore f'(2)=-1$ 또는 $f'(2)=1$

그런데 $f'(2)<g'(2)$이므로

$f'(2)=-1$, $g'(2)=1$

$\therefore f'(2)-g'(2)=-1-1=-2$

필수유형 10 131쪽

10-1 답 $\frac{1}{4}$

해결전략 | 접선을 좌표평면 위에 나타낸 후 x절편과 y절편을 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

STEP 1 $f(x)=2x^3-4x+5$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=2x^3-4x+5$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-4$

STEP 2 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식 구하기

$f'(1)=6-4=2$이므로 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3=2(x-1)$ $\therefore y=2x+1$

STEP 3 삼각형의 넓이 구하기

이 접선의 x절편, y절편은 각각 $-\frac{1}{2}$, 1이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{4}$

10-2 답 3

해결전략 | 접선을 좌표평면 위에 나타낸 후 직선 $y=2$와 y절편을 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

STEP 1 $f(x)=3x^2-1$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=3x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=6x$

STEP 2 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식 구하기

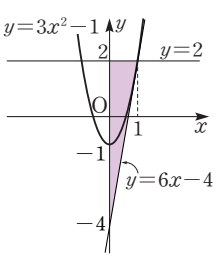
$f'(1)=6\times1=6$이므로 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=6(x-1)$ $\therefore y=6x-4$

STEP 3 삼각형의 넓이 구하기

이 접선의 y절편은 -4이므로 접선과 직선 $y=2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times1=3$



10-3 답 16

해결전략 | 접선을 좌표평면 위에 나타낸 후 x절편과 y절편을 이용하여 구한 삼각형의 넓이가 18일 때, k의 값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=kx^4(k>0)$에서

$f'(x)=4kx^3$

STEP 2 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식 구하기

점 $(1, f(1))$, 즉 점 $(1, k)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=4k$이므로 접선의 방정식은

$y-k=4k(x-1)$ $\therefore y=4kx-3k$

STEP 3 k의 값 구하기

이 접선의 x절편, y절편은 각각 $\frac{3}{4}$, $-3k$이고 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 18이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times3k=18$ $\therefore k=16$

10-4 답 28

해결전략 | 접선을 좌표평면 위에 나타낸 후 x절편과 y절편을 이용하여 구한 삼각형의 넓이가 $\frac{25}{2}$일 때, k의 값을 구한다.

STEP 1 $f(x)=2x^2-5x+a$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=2x^2-5x+a$로 놓으면

$f'(x)=4x-5$

STEP 2 점 $(1, k)$에서의 접선의 방정식 구하기

$f'(1)=4-5=-1$이므로 점 $(1, k)$에서의 접선의 방정식은

$y-k=-(x-1)$ $\therefore y=-x+k+1$

STEP 3 k의 값 구하기

이 접선의 x절편, y절편은 각각 $k+1$, $k+1$이고 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{25}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times(k+1)\times(k+1)=\frac{25}{2}$

$(k+1)^2=25$ $\therefore k=4$ ($\because k>-1$)

STEP 4 a의 값 구하기

점 $(1, 4)$는 곡선 $y=2x^2-5x+a$ 위의 점이므로

$4=2-5+a$ $\therefore a=7$

$\therefore ak=7\times4=28$

10-5 답 $\frac{3}{2}$

해결전략 | 점 P에서의 두 접선 l, m을 좌표평면 위에 나타낸 후 x절편을 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$, $g'(x)$ 구하기

$f(x)=x^2-2x+2$, $g(x)=-x^2+6$에서

$f'(x)=2x-2$, $g'(x)=-2x$

STEP 2 점 P의 좌표 구하기

제1사분면 위에서 만나는 점 P의 x좌표를 t라고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^2-2t+2=-t^2+6$

$t^2-t-2=0$, $(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

그런데 $t>0$이므로 $t=2$

즉, 점 P의 좌표는 $(2, 2)$이다.

STEP 3 두 직선 l, m의 방정식 구하기

따라서 $f'(2)=4-2=2$이므로 직선 l의 방정식은

$y-2=2(x-2)$ $\therefore y=2x-2$

$g'(2)=-4$이므로 직선 m의 방정식은

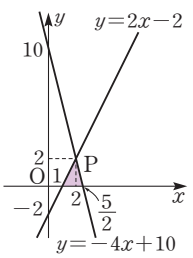
$y-2=-4(x-2)$ $\therefore y=-4x+10$

STEP 4 넓이 구하기

직선 $y=2x-2$의 x절편은 1,

직선 $y=-4x+10$의 x절편은 $\frac{5}{2}$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}-1\right)\times 2=\frac{3}{2}$



10-6 답 $\frac{3}{2}$

해결전략 | 접선을 좌표평면 위에 나타낸 후 x절편을 이용하여 평행사변형의 넓이를 구한다.

STEP 1 두 점 A, B의 좌표를 $A\left(\alpha, \frac{1}{3}\alpha^3-k\alpha^2+1\right)$, $B\left(\beta, \frac{1}{3}\beta^3-k\beta^2+1\right)$ $(\alpha<\beta)$이라 하고 도형 파악하기

$A\left(\alpha, \frac{1}{3}\alpha^3-k\alpha^2+1\right)$, $B\left(\beta, \frac{1}{3}\beta^3-k\beta^2+1\right)$ $(\alpha<\beta)$라고 하면 네 직선으로 둘러싸인 도형은 평행사변형이다.

STEP 2 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1$에서

$f'(x)=x^2-2kx$

STEP 3 두 접선 l, m의 방정식 구하기

두 접선의 기울기가 모두 $3k^2$이므로 $x^2-2kx=3k^2$에서

$x^2-2kx-3k^2=0$, $(x+k)(x-3k)=0$

$\therefore \alpha=-k$, $\beta=3k$ $(\because \alpha<\beta,\ k>0)$

$\therefore A\left(-k, -\frac{4}{3}k^3+1\right)$, $B(3k, 1)$

점 A에서의 접선 l의 방정식은

$y-\left(-\frac{4}{3}k^3+1\right)=3k^2\{x-(-k)\}$

$\therefore y=3k^2x+\frac{5}{3}k^3+1$

점 B에서의 접선 m의 방정식은

$y-1=3k^2(x-3k)$

$\therefore y=3k^2x-9k^3+1$

STEP 4 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선 구하기

x축에 평행한 직선의 기울기는 0이므로

$x^2-2kx=0$에서 $x(x-2k)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2k$

즉, x축에 평행한 두 접선의 방정식은

$y=f(0)$ 또는 $y=f(2k)$

즉, $y=1$ 또는 $y=1-\frac{4}{3}k^3$

STEP 5 평행사변형의 밑변의 길이와 높이 구하기

직선 $y=1$과 두 접선 l, m의 교점의 x좌표를 각각 x_1, x_2라고 하면

$3k^2x_1+\frac{5}{3}k^3+1=1$에서 $3k^2x_1=-\frac{5}{3}k^3$

$\therefore x_1=-\frac{5}{9}k$

$3k^2x_2-9k^3+1=1$에서 $3k^2x_2=9k^3$

$\therefore x_2=3k$

평행사변형의 밑변의 길이는

$x_2-x_1=3k-\left(-\frac{5}{9}k\right)=\frac{32}{9}k$

한편, 평행사변형의 높이는 x축에 평행한 두 직선 $y=1$, $y=1-\frac{4}{3}k^3$ 사이의 거리이므로

$1-\left(1-\frac{4}{3}k^3\right)=\frac{4}{3}k^3$

STEP 6 k의 값 구하기

이때 평행사변형의 넓이가 24이므로

$\frac{32}{9}k\times\frac{4}{3}k^3=24$, $k^4=\frac{81}{16}$, $k^2=\frac{9}{4}$

$\therefore k=\frac{3}{2}$ $(\because k>0)$

필수유형 11 133쪽

11-1 답 3

해결전략 | 함수 $f(x)$가 롤의 정리를 만족시키는 것을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

STEP 1 함수 $f(x)$가 롤의 정리를 만족시키는 것을 확인하기

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, 6]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 6)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(6)=3$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ $(0<c<6)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

STEP 2 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=-2x^2+12x+3$에서 $f'(x)=-4x+12$

STEP 3 c의 값 구하기

$f'(c)=-4c+12=0$에서

$c=3$

11-2 답 2

해결전략 | 함수 $f(x)$가 롤의 정리를 만족시키는 것을 이용하여 미지수의 개수를 구한다.

STEP 1 함수 $f(x)$가 롤의 정리를 만족시키는 것을 확인하기

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 4)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(4)=1$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ $(-1<c<4)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

STEP 2 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-4x^2-x+5$에서

$f'(x)=3x^2-8x-1$

STEP 3 c의 개수 구하기

$f'(c)=3c^2-8c-1=0$에서

$c=\frac{4\pm\sqrt{19}}{3}$

따라서 상수 c의 개수는 2이다.

11-3 답 ④

해결전략 | 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하고 $f(1)=f(3)$인지 확인한다.

ㄱ. 함수 $f(x)=|x-2|$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이지만 $x=2$에서 미분가능하지 않다.
즉, 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하지 않은 점이 있으므로 롤의 정리를 만족시키지 않는다.

ㄴ. 함수 $f(x)=|(x-1)(x-3)|$은 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(3)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ $(1<c<3)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)=4x-x^2$은 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(3)=3$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ $(1<c<3)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

따라서 롤의 정리가 성립하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11-4 답 6

해결전략 | 함수 $f(x)$가 롤의 정리를 만족시키는 상수가 c이면 $f'(c)=0$임을 이용하여 미지수 k의 값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=-x^2+kx$에서

$f'(x)=-2x+k$

STEP 2 k의 값 구하기

닫힌구간 $[2, 4]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수가 3이므로

$f'(3)=-6+k=0$ $\therefore k=6$

◉→ 다른 풀이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[2, 4]$에서 롤의 정리를 만족시키려면 $f(2)=f(4)$이어야 한다.

즉, $-4+2k=-16+4k$에서

$2k=12$ $\therefore k=6$

11-5 답 2

해결전략 | 함수 $f(x)$가 롤의 정리를 만족시키는 조건을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

STEP 1 k의 값 구하기

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하므로 롤의 정리를 만족시키려면 $f(1)=f(3)$이어야 한다.

즉, $k-1=3k-9$에서

$2k=8$ $\therefore k=4$

STEP 2 c의 값 구하기

$f(x)=4x-x^2$에서

$f'(x)=4-2x$

롤의 정리에 의하여

$f'(c)=0$ $(1<c<3)$인 c가 적어도 하나 존재하므로

$f'(c)=4-2c=0$

$\therefore c=2$

11-6 답 $\frac{4}{3}$

해결전략 | 함수 $f(x)$가 롤의 정리를 만족시키는 것을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=-2x^3-4x^2+8x+3$에서

$f'(x)=-6x^2-8x+8$

STEP 2 a의 값 구하기

닫힌구간 $[-a, a]$에서 롤의 정리를 만족시키므로

$f(-a)=f(a)$

즉, $2a^3-4a^2-8a+3=-2a^3-4a^2+8a+3$에서

$a^3-4a=0$, $a(a-2)(a+2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 자연수)

STEP 3 c의 값 구하기

롤의 정리를 만족시키는 실수 c가 존재하므로

$f'(c)=-6c^2-8c+8=0$

$3c^2+4c-4=0,\ (3c-2)(c+2)=0$

$\therefore\ c=\frac{2}{3}\ (\because\ -2<c<2)$

$\therefore\ a-c=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

필수유형 12 135쪽

12-1 답 7

해결전략 | 함수 $f(x)$가 평균값 정리를 만족시키는 것을 이용하여 k의 값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=-x^2+5x+1$에서

$f'(x)=-2x+5$

STEP 2 k의 값 구하기

닫힌구간 $[1,\ k]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 4이므로

$\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'(4)$

$\frac{(-k^2+5k+1)-5}{k-1}=-3,\ k^2-8k+7=0$

$(k-1)(k-7)=0$

$\therefore\ k=7\ (\because\ k>4)$

12-2 답 $\sqrt{3}$

해결전략 | 주어진 식을 변형시킨 후 함수 $f(x)$가 평균값 정리를 만족시키는 것을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-x+2$에서

$f'(x)=3x^2-1$

STEP 2 c의 값 구하기

$f(3)-f(0)=3f'(c)$에서

$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$이므로

$\frac{26-2}{3}=3c^2-1,\ c^2=3$

$\therefore\ c=\sqrt{3}\ (\because\ 0<c<3)$

12-3 답 ④

해결전략 | $f(x)$, $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하여 h에 대한 식으로 정리한 후 극한값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3+1$에서

$f'(x)=3x^2$

STEP 2 θ 구하기

$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$에서

$(x+h)^3+1-(x^3+1)=3h(x+\theta h)^2$

$3hx^2+3h^2x+h^3=3h(x+\theta h)^2$

$(x+\theta h)^2=x^2+hx+\frac{h^2}{3}$

$\therefore\ \theta=\frac{1}{h}\left(\sqrt{x^2+hx+\frac{h^2}{3}}-x\right)$

STEP 3 $\lim_{h\to0}\theta$의 값 구하기

$\therefore\ \lim_{h\to0}\theta=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\sqrt{x^2+hx+\frac{h^2}{3}}-x\right)$

$=\lim_{h\to0}\frac{hx+\frac{h^2}{3}}{h\left(\sqrt{x^2+hx+\frac{h^2}{3}}+x\right)}$

$=\lim_{h\to0}\frac{x+\frac{h}{3}}{\sqrt{x^2+hx+\frac{h^2}{3}}+x}=\frac{1}{2}$

12-4 답 $\frac{1}{2}$

해결전략 | $f(x)$, $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하여 h에 대한 식으로 정리한 후 θ의 값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+ax+b$에서

$f'(x)=x+a$

STEP 2 θ의 값 구하기

$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$에서

$\frac{1}{2}(x+h)^2+a(x+h)+b$

$=\left(\frac{1}{2}x^2+ax+b\right)+h(x+\theta h+a)$

$\frac{1}{2}h^2=\theta h^2\qquad\therefore\ \theta=\frac{1}{2}\ (\because\ h>0)$

12-5 답 4

해결전략 | 주어진 식을 정리한 후 평균값 정리를 이용하여 극한값을 구한다.

STEP 1 함수 $f(x)$가 평균값 정리를 만족시키는 것을 확인하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f(x)$는 닫힌구간 $[x-2, x+2]$에서 연속이고 열린구간 $(x-2, x+2)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+2)-f(x-2)}{(x+2)-(x-2)}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(x-2, x+2)$에 적어도 하나 존재한다.

STEP 2 극한값 구하기

이때 $x \longrightarrow \infty$이면 $c \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x+2)-f(x-2)\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x+2)-f(x-2)}{(x+2)-(x-2)}\times 4\right\}$$

$$=4\lim_{c\to\infty}f'(c)=4\times 1=4$$

12-6 답 8

해결전략 | 주어진 식을 정리한 후 평균값 정리를 이용하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

STEP 1 함수 $f(x)$가 평균값 정리를 만족시키는 것을 확인하기

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(c)$$

를 만족시키는 c가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

STEP 2 $M+m$의 값 구하기

그런데 조건 (나)에서 $1<c<2$인 모든 c에 대하여

$|f'(c)| \le 3$에서

$|4-f(1)| \le 3$ ($\because f(2)=4$)

$-3 \le 4-f(1) \le 3$

$\therefore 1 \le f(1) \le 7$

따라서 $f(1)$의 최댓값 $M=7$, 최솟값 $m=1$이므로

$M+m=7+1=8$

발전유형 13 137쪽

13-1 답 3

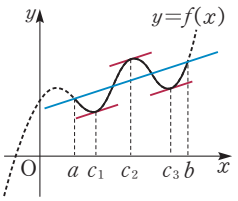
해결전략 | 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 그어 평균값 정리를 만족시키는 상수의 개수를 구한다.

STEP 1 상수 c 파악하기

닫힌구간 $[a, b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

STEP 2 상수 c의 개수 구하기

오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 3개 그을 수 있으므로 구하는 상수 c의 개수는 3이다.



13-2 답 2

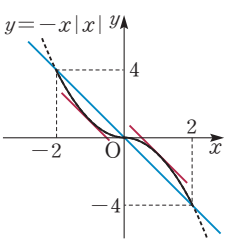
해결전략 | 주어진 구간의 양 끝 두 점을 잇는 직선과 평행한 접선을 그어 평균값 정리를 만족시키는 상수의 개수를 구한다.

STEP 1 상수 c 파악하기

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-2, 4)$, $(2, -4)$를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

STEP 2 상수 c의 개수 구하기

오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-2, 4)$, $(2, -4)$를 잇는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있으므로 구하는 상수 c의 개수는 2이다.



13-3 답 2

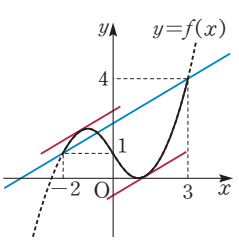
해결전략 | 주어진 구간의 양 끝 두 점을 잇는 직선과 평행한 접선을 그어 평균값 정리를 만족시키는 상수의 개수를 구한다.

STEP 1 상수 c 파악하기

닫힌구간 $[-2, 3]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-2, 1)$, $(3, 4)$를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

STEP 2 상수 c의 개수 구하기

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 두 점 $(-2, 1)$, $(3, 4)$를 잇는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있으므로 구하는 상수 c의 개수는 2이다.



› **참고** $\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고

$$f'(x)=\begin{cases}-2x-2 & (x<0)\\ 2x-2 & (x>0)\end{cases}$$이므로 $\lim_{x\to 0-}f'(x)$ $\lim_{x\to 0+}f'(x)=1$,

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

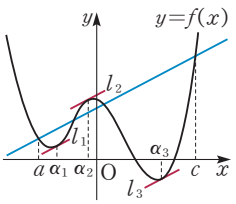
13-4 답 6

해결전략 | 함수의 그래프에서 평균값 정리와 롤의 정리를 만족시키는 경우를 찾는다.

STEP 1 평균값 정리를 만족시키는 실수 x의 개수 구하기

$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\alpha)$를 만족시키는 실수 α $(a<\alpha<c)$의 개수가 p이다.

즉, 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a, f(a))$, $(c, f(c))$를 연결한 직선과 기울기가 같은 접선을 찾으면 된다.

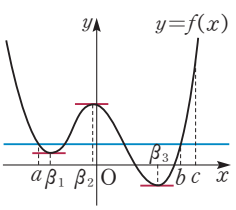


이때 직선 l_1, l_2, l_3의 접점의 x좌표가 구하는 x의 값이므로 $p=3$

STEP 2 롤의 정리를 만족시키는 실수 x의 개수 구하기

$f(a)=f(b)$이므로 $f'(\beta)=0$을 만족시키는 실수 β $(a<\beta<b)$의 개수가 q이다.

즉, 오른쪽 그림과 같이 접선의 기울기가 0이 되는 x의 값은 3개이므로



$q=3$

STEP 3 $p+q$의 값 구하기

$\therefore p+q=3+3=6$

13-5 답 ③

해결전략 | 주어진 부등식을 변형하여 의미하는 것을 파악한다.

STEP 1 주어진 부등식 변형하기

$a<b$에서 $b-a>0$이므로 주어진 부등식의 양변을 $b-a$로 나누면

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geq -1$

|보기|의 세 다항함수는 임의의 실수 a, b에 대하여 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 열린구간 (a, b)에서 미분가능하므로 평균값 정리의 조건을 만족시킨다.

즉, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족시키는 c가 열린구간 (a, b)에 존재해야 한다.

STEP 2 주어진 부등식을 만족시키는 함수 찾기

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3\geq -1$

ㄴ. $f'(x)=x+1$이므로 $x<-2$에서 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2-1\geq -1$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

실전 연습 문제 138~140쪽

01 ⑤	02 ②	03 9	04 ⑤	05 ⑤
06 1	07 $\frac{1}{6}$	08 ②	09 ②	10 2
11 ①	12 ⑤	13 $\frac{3}{2}$	14 ④	15 ②
16 $\frac{1}{2}$				

01

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^4-4x^3+6x^2+4$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+12x$

STEP 2 a의 값 구하기

$f'(a)=4$이므로 $4a^3-12a^2+12a=4$

$a^3-3a^2+3a-1=0$, $(a-1)^3=0$

$\therefore a=1$

STEP 3 b의 값 구하기

$f(1)=b$이므로 $1-4+6+4=b$

$\therefore b=7$

STEP 4 a^2+b^2의 값 구하기

$\therefore a^2+b^2=1^2+7^2=50$

02

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)=x^3-x^2+ax+2$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-x^2+ax+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x+a$

STEP 2 접선의 방정식 구하기

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$1-1+a+2=3$ $\therefore a=1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-2+1=2$

따라서 기울기가 2이고 점 $(1, 3)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-3=2(x-1)$ $\therefore y=2x+1$

$\therefore b=2$, $c=1$

STEP 3 $a+b-c$의 값 구하기

$\therefore a+b-c=1+2-1=2$

03

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용한다.

STEP 1 $f(1)$, $f'(1)$의 값 구하기

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=4$에서 $x\longrightarrow1$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+1\}=0$이므로 $f(1)=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$

STEP 2 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식 구하기

점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기가 4이므로 접선의 방정식은

$y-(-1)=4(x-1)$ $\quad\therefore y=4x-5$

STEP 3 $a-b$의 값 구하기

따라서 $a=4$, $b=-5$이므로

$a-b=4-(-5)=9$

04

해결전략 | 접점의 좌표를 미지수로 놓고 그 점에서의 접선의 방정식을 세운다.

STEP 1 점 P와 점 Q에서의 접선의 방정식 구하기

곡선 $y=2x^2+6$ 위의 점 P의 좌표를 $(\alpha, 2\alpha^2+6)$이라고 하면 $y'=4x$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-(2\alpha^2+6)=4\alpha(x-\alpha)$

$\therefore y=4\alpha x-2\alpha^2+6$ ····· ㉠

또, 곡선 $y=-x^2$ 위의 점 Q의 좌표를 $(\beta, -\beta^2)$이라고 하면 $y'=-2x$이므로 점 Q에서의 접선의 방정식은

$y-(-\beta^2)=-2\beta(x-\beta)$

$\therefore y=-2\beta x+\beta^2$ ····· ㉡

STEP 2 두 점 P, Q의 좌표 구하기

이때 ㉠, ㉡이 일치해야 하므로

$4\alpha=-2\beta$에서 $\beta=-2\alpha$

$-2\alpha^2+6=\beta^2$이므로 이 식에 $\beta=-2\alpha$를 대입하면

$-2\alpha^2+6=4\alpha^2$, $\alpha^2=1$

$\therefore \alpha=\pm1$

그런데 직선 l의 기울기가 양수이므로 $\alpha>0$에서

$\alpha=1$이고, $\beta=-2\alpha=-2\times1=-2$

$\therefore$ P$(1, 8)$, Q$(-2, -4)$

STEP 3 선분 PQ의 길이 구하기

$\therefore \overline{\text{PQ}}=\sqrt{(-2-1)^2+(-4-8)^2}=3\sqrt{17}$

05

해결전략 | $g'(x)=f(x)$임을 이용하여 기울기를 찾아 접선의 방정식을 구한 후 x절편을 찾는다.

STEP 1 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 방정식 구하기

$g'(x)=f(x)$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 기울기는 $g'(2)=f(2)=(2-3)^2=1$이고 접선의 방정식은

$y-g(2)=g'(2)(x-2)$

$\therefore y=x-2+g(2)$ ····· ㉠

STEP 2 접선의 x절편 구하기

접선의 y절편이 -5이므로 ㉠에서

$-2+g(2)=-5$

$\therefore g(2)=-3$

따라서 접선의 방정식은 $y=x-5$이므로 $y=0$을 대입하면 x절편은 5이다.

06

해결전략 | 기울기가 주어진 접선의 방정식은 기울기를 이용하여 접점의 좌표를 찾은 후 접선의 방정식을 구한다.

STEP 1 직선 $y=x+2$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식 구하기

직선 $y=x+2$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=x-k+2$ ····· ㉠

····· ❶

STEP 2 접선의 방정식 구하기

$f(x)=x^3-x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x$

접점의 좌표를 (a, a^3-a^2+2)라고 하면

$f'(a)=3a^2-2a=1$에서

$3a^2-2a-1=0$, $(3a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $a=1$

즉, 접점의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{50}{27}\right)$, $(1, 2)$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{50}{27}=x-\left(-\dfrac{1}{3}\right)$에서 $y=x+\dfrac{59}{27}$ ····· ㉡

$y-2=x-1$에서 $y=x+1$ ····· ㉢

····· ❷

STEP 3 양수 k의 값 구하기

㉠이 두 접선의 방정식 ㉡ 또는 ㉢과 같아야 하므로

㉠=㉡에서 $-k+2=\frac{59}{27}$

$\therefore\ k=-\frac{5}{27}$

㉠=㉢에서 $-k+2=1$

$\therefore\ k=1$

이때 k는 양수이므로 $k=1$ ····· ❸

채점 요소	배점
❶ 직선 $y=x+2$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식 구하기	20 %
❷ 접선의 방정식 구하기	60 %
❸ 양수 k의 값 구하기	20 %

07

해결전략 I 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용하여 접선에 수직인 직선의 기울기를 구한다.

STEP 1 y' 구하기

$y=x^3+1$에서 $y'=3x^2$

STEP 2 점 $\mathrm{P}(t,\ t^3+1)$에서의 접선의 방정식 구하기

점 $\mathrm{P}(t,\ t^3+1)$에서의 접선의 기울기는 $3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+1)=3t^2(x-t)$

$\therefore\ y=3t^2x+1-2t^3$

STEP 3 두 점 Q, R의 좌표 구하기

이 접선이 y축과 만나는 점 Q의 좌표는

$(0,\ 1-2t^3)$

또, 점 $\mathrm{P}(t,\ t^3+1)$을 지나고 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3t^2}$이므로 접선에 수직인 직선의 방정식은

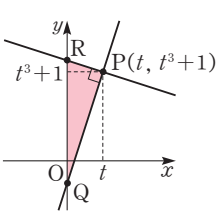
$y-(t^3+1)=-\frac{1}{3t^2}(x-t)$

$\therefore\ y=-\frac{1}{3t^2}x+\frac{1}{3t}+t^3+1$

이 직선이 y축과 만나는 점 R의 좌표는

$\left(0,\ \frac{1}{3t}+t^3+1\right)$

STEP 4 $\lim_{t\to0}S(t)$의 값 구하기



$\overline{\mathrm{QR}}=\left|\left(\frac{1}{3t}+t^3+1\right)-(1-2t^3)\right|$

$=\left|\frac{1}{3t}+3t^3\right|$

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QR}}\times|t|$

$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{3t}+3t^3\right||t|$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+3t^4\right)$

$\therefore\ \lim_{t\to0}S(t)=\lim_{t\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+3t^4\right)=\frac{1}{6}$

08

해결전략 I 접점의 좌표를 미지수로 놓고 그 점에서의 접선의 방정식을 세운다.

STEP 1 $f(x)=-x^3-x^2+x$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=-x^3-x^2+x$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2-2x+1$

STEP 2 접점의 좌표를 $(t,\ -t^3-t^2+t)$라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 $(t,\ -t^3-t^2+t)$라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-3t^2-2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3-t^2+t)=(-3t^2-2t+1)(x-t)$

$\therefore\ y=(-3t^2-2t+1)x+2t^3+t^2$

STEP 3 접선이 지나는 점을 이용하여 t의 값 구하기

이 직선이 원점을 지나므로

$0=2t^3+t^2$

$t^2(2t+1)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$

STEP 4 모든 직선의 기울기의 합 구하기

(i) $t=0$일 때

$f'(t)=-3t^2-2t+1$에 $t=0$을 대입하면

$f'(0)=1$

(ii) $t=-\frac{1}{2}$일 때

$f'(t)=-3t^2-2t+1$에 $t=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}+1+1=\frac{5}{4}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 직선의 기울기의 합은

$1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

09

해결전략 | 접선의 방정식이 주어진 직선과 일치함을 이용하여 미정계수를 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^3+ax^2+ax+3$으로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3+ax^2+ax+3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+a$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^3+at^2+at+3)이라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 (t, t^3+at^2+at+3)이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2at+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2+at+3)=(3t^2+2at+a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2at+a)x-2t^3-at^2+3$

STEP 3 t의 값 구하기

이 직선이 직선 $y=x+3$과 일치해야 하므로

$3t^2+2at+a=1$ …… ㉠

$-2t^3-at^2+3=3$, $t^2(2t+a)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=-\frac{a}{2}$

STEP 4 a의 값 구하기

(i) $t=0$을 ㉠에 대입하면

$a=1$

(ii) $t=-\frac{a}{2}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{4}a^2-a^2+a=1$, $(a-2)^2=0$

$\therefore a=2$

STEP 5 모든 상수 a의 값의 곱 구하기

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 곱은

$1\times 2=2$

10

해결전략 | 접점의 좌표를 미지수로 놓고 미지수를 이용하여 삼각형의 무게중심의 좌표를 나타낸다.

STEP 1 $f(x)=x^2+k$로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=2x$

STEP 2 접점의 좌표를 (t, t^2+k)라 하고 접선의 방정식 세우기

접점의 좌표를 (t, t^2+k)라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+k)=2t(x-t)$

$\therefore y=2tx-t^2+k$ …… ❶

STEP 3 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 관계식 세우기

이 직선이 점 $\mathrm{P}(1, -3)$을 지나므로

$-3=2t-t^2+k$

$\therefore t^2-2t-k-3=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=k+4>0$ ($\because k\geq 0$)이므로 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근을 α, β라고 하면 이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-k-3$ …… ㉡

…… ❷

STEP 4 k의 값 구하기

이때 α, β는 두 접점 Q, R의 x좌표이므로

$\mathrm{Q}(\alpha, \alpha^2+k)$, $\mathrm{R}(\beta, \beta^2+k)$

라고 하면 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{\alpha+\beta+1}{3}, \frac{\alpha^2+\beta^2+2k-3}{3}\right)$

무게중심의 y좌표가 5이므로

$\frac{\alpha^2+\beta^2+2k-3}{3}=5$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2k-3=15$

$4+2k+6+2k-3=15$ ($\because$ ㉡)

$4k=8$

$\therefore k=2$ …… ❸

채점 요소	배점
❶ 접점의 좌표를 (t, t^2+k)라 하고 접선의 방정식 세우기	30 %
❷ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 관계식 세우기	30 %
❸ k의 값 구하기	40 %

11

해결전략 | 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용하여 거리의 최솟값을 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^2-3x+3$으로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^2-3x+3$으로 놓으면

$f'(x)=2x-3$

STEP 2 곡선 $y=x^2-3x+3$ 위의 점을 $\mathrm{P}(t, t^2-3t+3)$이라 하고 거리가 최소일 때의 t의 값 구하기

곡선 $y=x^2-3x+3$ 위의 점을 $\mathrm{P}(t, t^2-3t+3)$이라고

하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-3$이다.
이때 원 $x^2+y^2=1$의 중심이 O(0, 0)이므로 곡선 위의 점과 원 사이의 거리의 최솟값은 점 P에서의 접선과 직선 OP가 서로 수직이 될 때의 점 P와 점 O 사이의 거리에서 원의 반지름의 길이 1을 뺀 것과 같다.

직선 OP의 기울기는 $\frac{t^2-3t+3}{t}$이므로

$\frac{t^2-3t+3}{t}\times(2t-3)=-1$

$2t^3-9t^2+16t-9=0$, $(t-1)(2t^2-7t+9)=0$

$\therefore t=1$ ($\because 2t^2-7t+9>0$)

STEP 3 거리의 최솟값 구하기

따라서 거리가 최소일 때의 점 P의 좌표는 (1, 1)이고 $\overline{OP}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$이므로 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{2}-1$이다.

12

해결전략 | 접점의 좌표와 곡선이 x축과 만나는 점을 구하여 삼각형의 모양을 파악한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^2$에서

$f'(x)=2x$

STEP 2 점 Q의 좌표 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P(1, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 접선 l의 방정식은

$y-1=2(x-1)$

$\therefore y=2x-1$ ····· ㉠

직선 l과 곡선 $y=g(x)$의 접점 Q의 좌표를 (a, b)라고 하면 점 Q는 직선 l 위의 점이므로 ㉠에서

$b=2a-1$ ····· ㉡

$g(x)=-(x-3)^2+k=-x^2+6x-9+k$에서

$g'(x)=-2x+6$

점 Q에서의 접선의 기울기가 2이므로

$g'(a)=-2a+6=2$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면 $b=3$

$\therefore$ Q(2, 3)

STEP 3 $g(x)$ 구하기

한편, 점 Q(2, 3)이 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$3=-(2-3)^2+k$ $\therefore k=4$

$\therefore g(x)=-x^2+6x-5$

STEP 4 두 점 R, S의 x좌표 구하기

곡선 $y=g(x)$와 x축이 만나는 두 점 R, S의 x좌표는 방정식 $g(x)=0$의 두 근이다.

즉, $-x^2+6x-5=0$에서

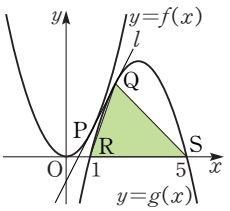
$x^2-6x+5=0$, $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

STEP 5 삼각형 QRS의 넓이 구하기

따라서 삼각형 QRS의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times3=6$



13

해결전략 | 기울기가 최대인 접선의 방정식을 구한 후 접선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분을 파악한다.

STEP 1 최대인 접선의 기울기 구하기

$f(x)=-x^3+3x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+6x=-3(x-1)^2+3$

즉, 주어진 곡선에 접하는 직선 중에서 기울기가 최대일 때는 $x=1$에서 접할 때이고, 그때의 기울기는 3이다. ····· ❶

STEP 2 직선 l의 방정식 구하기

$f(1)=-1+3+4=6$이므로 직선 l은 기울기가 3이고 점 (1, 6)을 지나는 직선이다.

따라서 직선 l의 방정식은

$y-6=3(x-1)$ $\therefore y=3x+3$ ····· ❷

STEP 3 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기

직선 l의 x절편은 -1, y절편은 3이므로 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times|-1|\times|3|=\frac{3}{2}$ ····· ❸

채점 요소	배점
❶ 최대인 접선의 기울기 구하기	40 %
❷ 직선 l의 방정식 구하기	30 %
❸ 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기	30 %

14

해결전략 | 함수 $f(x)$가 롤의 정리를 만족시키는 것을 이용하여 c의 값을 구한다.

STEP 1 함수 $f(x)$가 롤의 정리를 만족시키는 것을 확인하기

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하며 $f(a)=f(b)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ $(a<c<b)$인 c가 적어도 하나

존재한다.

STEP 2 c의 값 구하기

이때 $f'(x)=2x-(a+b)$이므로

$f'(c)=2c-(a+b)=0$

$\therefore c=\frac{a+b}{2}$

15

해결전략 | 주어진 등식을 변형하여 의미하는 것을 파악한다.

STEP 1 주어진 등식 변형하기

$\frac{f(1)-f(-1)}{2}=f'(c)$에서

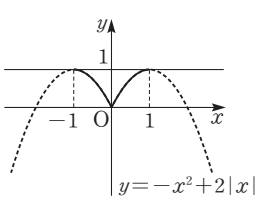
$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$ …… ㉠

즉, 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 롤의 정리를 만족하는 함수 $f(x)$를 찾으면 된다.

STEP 2 주어진 등식을 만족시키는 함수 찾기

ㄱ, ㄴ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 ㉠을 만족시키는 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. 함수 $y=-x^2+2|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.



즉, ㉠을 만족시키는 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 존재하지 않는다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

16

해결전략 | $f(x)$, $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하여 h에 대한 식으로 정리한 후 θ를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^2+ax+b$에서 $f'(x)=2x+a$

STEP 2 θ의 값 구하기

$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$에서

$(x+h)^2+a(x+h)+b$

$=x^2+ax+b+h\{2(x+\theta h)+a\}$

$h^2=2\theta h^2$

$\therefore \theta=\frac{1}{2}$ $(\because h>0)$

상위권 도약 문제 141~142쪽

01 97 **02** ① **03** ① **04** ① **05** $\frac{5}{3}$

06 ③ **07** ④

01

해결전략 | 주어진 극한값을 변형하여 미분계수를 구한 후 접선의 방정식을 구한다.

STEP 1 조건 (가), (나)에서 $f(2)$, $g(2)$, $f'(2)$, $g'(2)$에 대한 관계식 찾기

조건 (나)의 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow 2$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로

$f(2)-g(2)=0$에서 $f(2)=g(2)$

조건 (가)에서 $g(x)=x^3f(x)-7$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=8f(2)-7$ $\therefore g(2)=f(2)=1$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$

$=f'(2)-g'(2)=2$

$\therefore g'(2)=f'(2)-2$ …… ㉠

STEP 2 $g'(2)$의 값 구하기

$g(x)=x^3f(x)-7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)$

$f'(2)-2=12\times 1+8f'(2)$ $(\because$ ㉠$)$

$7f'(2)=-14$ $\therefore f'(2)=-2$

㉠에서 $g'(2)=-2-2=-4$

STEP 3 a^2+b^2의 값 구하기

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$, 즉 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 $g'(2)=-4$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-4(x-2)$ $\therefore y=-4x+9$

따라서 $a=-4$, $b=9$이므로

$a^2+b^2=(-4)^2+9^2=97$

02

해결전략 | 접선의 방정식을 구한 후 x축과의 교점의 좌표에서 a_{10}의 값을 구한다.

STEP 1 점 $(2, 4)$에서의 접선의 방정식 구하기

$f(x)=x^2$으로 놓으면

$f'(x)=2x$

점 $(2, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 접선의 방정식은

$y-4=4(x-2)$ $\therefore y=4x-4$

STEP 2 점 (a_n, a_n^2)에서의 접선의 방정식 구하기

곡선 위의 점 (a_n, a_n^2)에서의 접선의 기울기는

$f'(a_n)=2a_n$이므로 접선의 방정식은

$y-a_n^2=2a_n(x-a_n)$ $\therefore y=2a_nx-a_n^2$

STEP 3 a_{10}의 값 구하기

이 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}a_n, 0\right)$이므로

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

따라서 $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $a_4=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, …이므로

$a_{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^9$

03

해결전략 | 접선의 방정식을 이용하여 점의 좌표를 찾은 후 극한값을 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^4$으로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^4$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3$

STEP 2 점 $\mathrm{P}(1, 1)$에서의 접선의 방정식 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$이므로 접선의 방정식은

$y-1=4(x-1)$ $\therefore y=4x-3$

STEP 3 $\overline{\mathrm{QR}}$, $\overline{\mathrm{RH}}$를 t에 대한 식으로 나타내기

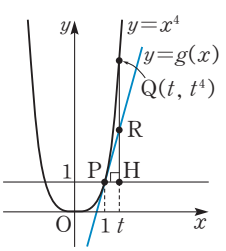
따라서 $g(x)=4x-3$이므로

$\mathrm{R}(t, 4t-3)$

이때 $\mathrm{Q}(t, t^4)$, $\mathrm{H}(t, 1)$이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=t^4-(4t-3)=t^4-4t+3$

$\overline{\mathrm{RH}}=(4t-3)-1=4t-4$



STEP 4 $\lim\limits_{t\to1}\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{RH}}}$의 값 구하기

$\therefore \lim\limits_{t\to1}\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{RH}}}=\lim\limits_{t\to1}\frac{t^4-4t+3}{4t-4}$

$=\lim\limits_{t\to1}\frac{(t-1)^2(t^2+2t+3)}{4(t-1)}$

$=\lim\limits_{t\to1}\frac{(t-1)(t^2+2t+3)}{4}=0$

04

해결전략 | 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용하여 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구한다.

STEP 1 $f(x)=x^4$으로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^4$으로 놓으면

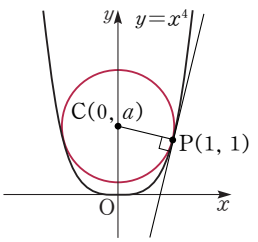
$f'(x)=4x^3$

STEP 2 원의 중심을 $\mathrm{C}(0, a)$라 하고 a의 값 구하기

점 $\mathrm{P}(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$

원의 중심을 $\mathrm{C}(0, a)$라고 하면 직선 CP의 기울기는

$\frac{1-a}{1-0}=1-a$



이때 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로

$4(1-a)=-1$ $\therefore a=\frac{5}{4}$

STEP 3 원의 반지름의 길이 구하기

따라서 원의 중심은 $\mathrm{C}\left(0, \frac{5}{4}\right)$이므로 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(1-0)^2+\left(1-\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$

풍쌤의 비법

곡선 $y=f(x)$와 원 C가 접할 때,

(1) 원 C의 중심과 접점을 지나는 직선은 곡선과 원의 접점에서의 접선과 수직이다.

(2) 원 C의 반지름의 길이는 원 C의 중심과 접점 사이의 거리와 같다.

05

해결전략 | 접선의 기울기를 식으로 나타낸 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 해결한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=-x^3+4x^2-3x$에서

$f'(x)=-3x^2+8x-3$

STEP 2 직선 AC의 기울기 구하기

점 $\mathrm{B}(3, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=-27+24-3=-6$

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:1$이므로 $\overline{\mathrm{DB}}=k$라고 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=3k$

직선 BC의 기울기는 점 $\mathrm{B}(3, 0)$에서의 접선의 기울기와 같으므로

$-\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{DB}}}=-6$ $\therefore \overline{\mathrm{CD}}=6k$

또, 직선 AC의 기울기를 구하면

$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{6k}{3k}=2$

STEP 3 모든 a의 값의 곱 구하기

이때 직선 AC의 기울기는 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기 $f'(a)$와 같으므로

$f'(a)=2$에서 $-3a^2+8a-3=2$

$3a^2-8a+5=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 a의 값의 곱은 $\frac{5}{3}$이다.

06

해결전략 | 곡선과 접선이 만나는 점의 x좌표는 곡선과 접선의 방정식을 연립하여 얻은 방정식의 해와 같음을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3+ax$에서

$f'(x)=3x^2+a$

STEP 2 점 B의 좌표 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(-1,\ -1-a)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(-1-a)=(3+a)(x+1)$

$\therefore y=(3+a)x+2$

이 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표는

$x^3+ax=(3+a)x+2$에서

$x^3-3x-2=0,\ (x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이때 점 A의 x좌표가 -1이므로 점 B의 x좌표는 2, 즉 $b=2$이다.

따라서 $B(2,\ f(2))$, 즉 $B(2,\ 8+2a)$

STEP 3 점 C의 x좌표 구하기

점 $B(2,\ 8+2a)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=12+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(8+2a)=(12+a)(x-2)$

$\therefore y=(12+a)x-16$

이 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표는

$x^3+ax=(12+a)x-16$에서

$x^3-12x+16=0,\ (x-2)^2(x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-4$

점 B의 x좌표가 2이므로 점 C의 x좌표는 -4, 즉 $c=-4$이다.

STEP 4 a의 값 구하기

$f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)$

$=(8+2a)+(-64-4a)$

$=-56-2a=-80$

$\therefore a=12$

07

해결전략 | 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용하여 원의 중심의 좌표를 구한다.

STEP 1 곡선 $y=x^3+1$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식 구하기

$y=x^3+1$에서 $y'=3x^2$

곡선 $y=x^3+1$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=3(x-1)$ $\therefore y=3x-1$

STEP 2 원의 중심의 좌표 구하기

원의 중심의 좌표를 $(0,\ a)$라고 하면 두 점 $(0,\ a)$, $(1,\ 2)$를 지나는 직선이 접선 l과 수직이므로

$\frac{2-a}{1-0}\times 3=-1,\ 2-a=-\frac{1}{3}$

$\therefore a=\frac{7}{3}$

즉, 원의 중심의 좌표는 $\left(0,\ \frac{7}{3}\right)$이다.

STEP 3 원의 넓이 구하기

원의 반지름의 길이를 r라고 하면 r는 원의 중심 $\left(0,\ \frac{7}{3}\right)$과 접점 $(1,\ 2)$ 사이의 거리와 같으므로

$r=\sqrt{(1-0)^2+\left(2-\frac{7}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}$

따라서 반지름의 길이가 r인 원의 넓이는

$\pi r^2=\frac{10}{9}\pi$

05 도함수의 활용(2)

개념확인 144~145쪽

01 답 풀이 참조

(1) $f(x)=-x^3+2x^2+4x-2$에서

$f'(x)=-3x^2+4x+4=-(3x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$, $[2, \infty)$에서 감소하고, 구간 $\left[-\frac{2}{3}, 2\right]$에서 증가한다.

(2) $f(x)=x^4-2x^2+1$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$에서 감소하고, 구간 $[-1, 0]$, $[1, \infty)$에서 증가한다.

02 답 (1) 극댓값: $6\sqrt{3}$, 극솟값: $-6\sqrt{3}$

(2) 극댓값: -3, 극솟값: -4

(1) $f(x)=x^3-9x$에서

$f'(x)=3x^2-9=3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$에서 극대이므로 극댓값은

$f(-\sqrt{3})=6\sqrt{3}$

$x=\sqrt{3}$에서 극소이므로 극솟값은

$f(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$

(2) $f(x)=-x^4+2x^2-4$에서

$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(-1)=f(1)=-3$

$x=0$에서 극소이므로 극솟값은

$f(0)=-4$

03 답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -38

(2) 최댓값: 36, 최솟값: $\frac{37}{16}$

(1) $f(x)=-2x^3+6x-2$에서

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $0\le x\le 3$)

닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-38

따라서 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 2, $x=3$에서 최솟값 -38을 갖는다.

(2) $f(x)=x^4-2x^3+4$에서

$f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	36	$\searrow$		$\searrow$	$\frac{37}{16}$	$\nearrow$	4

따라서 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 36, $x=\frac{3}{2}$에서 최솟값 $\frac{37}{16}$을 갖는다.

필수유형 01 147쪽

01-1 답 (1) $[-3, 1]$ (2) $(-\infty, \infty)$

해결전략 | $f'(x)$를 구하여 함수 $f(x)$의 증감표를 작성한다.

(1) STEP1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=x^3+3x^2-9x+1$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

STEP2 증감표 작성하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

STEP3 감소하는 구간 구하기

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $[-3, 1]$이다.

◉→ 다른 풀이

$f(x)=x^3+3x^2-9x+1$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

함수 $f(x)$가 감소하려면 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$3(x+3)(x-1)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 1$

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $[-3, 1]$이다.

(2) STEP1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=-x^3+x^2-x$에서

$f'(x)=-3x^2+2x-1$

$=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{3}$

STEP2 감소하는 구간 구하기

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

01-2 답 (1) $[-\sqrt{5}, 0]$, $[\sqrt{5}, \infty)$ (2) $(-\infty, 3]$

해결전략 | $f'(x)$를 구하여 함수 $f(x)$의 증감표를 작성한다.

(1) STEP1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=x^4-10x^2+5$에서

$f'(x)=4x^3-20x=4x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

$f'(x)=0$에서

$x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{5}$

STEP2 증감표 작성하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

STEP3 증가하는 구간 구하기

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 $[-\sqrt{5}, 0]$, $[\sqrt{5}, \infty)$이다.

(2) STEP1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=-x^4+4x^3-2$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2=-4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

STEP2 증감표 작성하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗		↘

STEP3 증가하는 구간 구하기

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 $(-\infty, 3]$이다.

01-3 답 5

해결전략 | $f(x)$가 감소하는 구간은 $f'(x)\le 0$의 해와 같다.

STEP1 $f'(x)\le 0$의 해 구하기

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-6x+\frac{1}{3}$에서

$f'(x)=x^2-2x-6$

함수 $f(x)$가 감소하려면 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$x^2-2x-6\le 0$ → $2<\sqrt{7}<3$이므로 $-2<1-\sqrt{7}<-1, 3<1+\sqrt{7}<4$

$\therefore 1-\sqrt{7}\le x\le 1+\sqrt{7}$

STEP2 감소하는 구간에 속하는 정수의 개수 구하기

즉, 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $[1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}]$이므로 이 구간에 속하는 정수의 개수는 -1, 0, 1, 2, 3의 5이다.

› **참고** 이차방정식 $x^2-2x-6=0$의 해는

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(-6)}=1\pm\sqrt{7}$

01-4 답 2

해결전략 | $f(x)$가 증가하는 구간은 $f'(x)\ge 0$의 해와 같다.

STEP1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-1$에서

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

$=12(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

STEP2 증감표 작성하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

STEP 3 a의 최솟값 구하기

따라서 함수 $f(x)$는 $-1\le x\le 1$, $x\ge 2$에서 증가하므로 실수 a의 최솟값은 2이다.

01-5 답 -9

해결전략 | $f(x)$의 증가, 감소를 이용하여 $f'(x)=0$의 해를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=2x^3+ax^2+bx-3$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$ …… ㉠

STEP 2 $f(x)$의 증가, 감소를 이용하여 $f'(x)$ 구하기

함수 $f(x)$가 $x\le -2$, $x\ge 1$에서 증가하고, $-2\le x\le 1$에서 감소하므로

$f'(-2)=0$, $f'(1)=0$

즉, $f'(x)$는 $x+2$, $x-1$을 인수로 가지므로

$f'(x)=6(x+2)(x-1)$

$=6x^2+6x-12$ …… ㉡

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

㉠=㉡에서 $2a=6$, $b=-12$이므로

$a=3$, $b=-12$

$\therefore a+b=3+(-12)=-9$

> 풍쌤의 비법
>
> 미분가능한 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 증가하고 닫힌구간 $[b, c]$에서 감소하면
>
> $f'(b)=0$

01-6 답 $0<x\le 50$

해결전략 | 판매 이익 y가 증가하는 x의 값의 범위는 $y'\ge 0$임을 이용하여 구한다.

STEP 1 y' 구하기

$y=-4x^3+300x^2$에서

$y'=-12x^2+600x=-12x(x-50)$

STEP 2 판매 이익이 증가하는 x의 값의 범위 구하기

판매 이익이 증가하려면

$-12x(x-50)\ge 0$, $x(x-50)\le 0$

$\therefore 0<x\le 50$ ($\because 0<x<75$)

필수유형 02 149쪽

02-1 답 $0\le a\le 6$

해결전략 | 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 감소하려면 이차부등식 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=-x^3+ax^2-2ax$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax-2a$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 감소하려면 부등식

$f'(x)\le 0$, 즉 $-3x^2+2ax-2a\le 0$

이 항상 성립해야 한다.

STEP 2 a의 값의 범위 구하기

따라서 이차방정식 $-3x^2+2ax-2a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(-3)\times(-2a)\le 0$, $a^2-6a\le 0$

$a(a-6)\le 0$ $\therefore 0\le a\le 6$

› **참고** 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

02-2 답 6

해결전략 | $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키는 함수 $f(x)$는 증가함수임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a+6)x+2$에서

$f'(x)=x^2-2ax+a+6$

주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 부등식

$f'(x)\ge 0$, 즉 $x^2-2ax+a+6\ge 0$

이 항상 성립해야 한다.

STEP 2 정수 a의 개수 구하기

따라서 이차방정식 $x^2-2ax+a+6=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a+6)\le 0$

$a^2-a-6\le 0$, $(a+2)(a-3)\le 0$

$\therefore -2\le a\le 3$

따라서 정수 a의 개수는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6이다.

02-3 답 -6

해결전략 | 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 함을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=-x^3+4x^2+ax-3$에서

$f'(x)=-3x^2+8x+a$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

그런데 $f'(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 부등식 $f'(x)\le 0$, 즉 $-3x^2+8x+a\le 0$이 항상 성립해야 한다.

STEP 2 a의 최댓값 구하기

따라서 이차방정식 $-3x^2+8x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=4^2-(-3)\times a\le 0$$

$$3a+16\le 0 \qquad \therefore a\le -\frac{16}{3}$$

따라서 정수 a의 최댓값은 -6이다.

02-4 답 3

해결전략 | 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는 일대일대응임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=x^3+kx^2+(k+6)x+4$에서

$f'(x)=3x^2+2kx+k+6$

조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $f(x)$는 일대일대응이므로 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

그런데 $f'(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 부등식 $f'(x)\ge 0$, 즉 $3x^2+2kx+k+6\ge 0$이 항상 성립해야 한다.

STEP 2 k의 값의 범위 구하기

따라서 이차방정식 $3x^2+2kx+k+6=0$의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-3(k+6)\le 0$$

$k^2-3k-18\le 0$, $(k+3)(k-6)\le 0$

$\therefore -3\le k\le 6$

STEP 3 k의 최댓값과 최솟값의 합 구하기

따라서 k의 최댓값은 6, 최솟값은 -3이므로 구하는 합은 $6+(-3)=3$

02-5 답 $a\le -3$

해결전략 | 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $f'(x)\le 0$이 성립하도록 하는 조건을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=(a+2)x^3-3x^2+ax-1$에서

$f'(x)=3(a+2)x^2-6x+a$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 감소하려면 부등식 $f'(x)\le 0$, 즉 $3(a+2)x^2-6x+a\le 0$이 항상 성립해야 한다.

STEP 2 a의 값의 범위 구하기

이차함수 $y=f'(x)$의 그래프가 위로 볼록해야 하므로

$3(a+2)<0$

$\therefore a<-2$ …… ㉠

또, 이차방정식 $3(a+2)x^2-6x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-3(a+2)\times a\le 0$$

$-3a^2-6a+9\le 0$, $a^2+2a-3\ge 0$

$(a+3)(a-1)\ge 0$

$\therefore a\le -3$ 또는 $a\ge 1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a\le -3$

02-6 답 $-\frac{5}{2}$

해결전략 | 절댓값 기호 안의 식이 0이 되도록 하는 값을 기준으로 구간을 나누어 $f'(x)$를 구한다.

STEP 1 $x\ge 2a$에서 $f'(x)>0$임을 알기

(i) $x\ge 2a$일 때

$x-2a\ge 0$이므로

$f(x)=x^3+6x^2+15x-30a+3$

$\therefore f'(x)=3x^2+12x+15$

$=3(x+2)^2+3>0$

따라서 $x\ge 2a$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

STEP 2 $x<2a$에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위 구하기

(ii) $x<2a$일 때

$x-2a<0$이므로

$f(x)=x^3+6x^2-15x+30a+3$

$\therefore f'(x)=3x^2+12x-15=3(x+5)(x-1)$

$f'(x)\ge 0$에서 $x\le -5$ 또는 $x\ge 1$

이때 $x<2a$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$$2a\le -5 \qquad \therefore a\le -\frac{5}{2}$$

STEP 3 a의 최댓값 구하기

(i), (ii)에 의하여 $a\le -\frac{5}{2}$

따라서 a의 최댓값은 $-\frac{5}{2}$이다.

필수유형 03 151쪽

03-1 답 -3

해결전략 | 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, 3]$에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+(k+4)x$에서

$f'(x)=x^2-2x+k+4$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, 3]$에서 증가하려면 이 구간에서

$f'(x)=x^2-2x+k+4 \geq 0$ …… ㉠

이어야 한다.

STEP 2 $f'(x)$의 최솟값 구하기

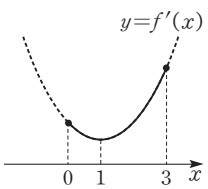
$f'(x)=(x-1)^2+k+3$이므로

$0 \leq x \leq 3$일 때, 함수 $f'(x)$는

$x=1$에서 최솟값

$f'(1)=k+3$

을 갖는다.



STEP 3 k의 최솟값 구하기

따라서 부등식 ㉠이 성립하려면

$k+3 \geq 0$ $\therefore k \geq -3$

즉, k의 최솟값은 -3이다.

03-2 답 -7

해결전략 | 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x) \leq 0$이어야 한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=x(x^2+2x+a)$에서

$f'(x)=(x^2+2x+a)+x(2x+2)$

$=3x^2+4x+a$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 감소하려면 이 구간에서

$f'(x)=3x^2+4x+a \leq 0$ …… ㉠

이어야 한다.

STEP 2 $f'(x)$의 최댓값 구하기

$f'(x)=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+a-\frac{4}{3}$이므로 $-2 \leq x \leq 1$일 때, 함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 최댓값

$f'(1)=a+7$

을 갖는다.

STEP 3 a의 최댓값 구하기

따라서 부등식 ㉠이 성립하려면

$a+7 \leq 0$ $\therefore a \leq -7$

즉, a의 최댓값은 -7이다.

03-3 답 $k \leq 48$

해결전략 | 함수 $f(x)$가 $x \geq 4$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x) \leq 0$이어야 하므로 ($f'(x)$의 최댓값) ≤ 0이 성립하는 범위를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=-x^3-6x^2+2kx+4$에서

$f'(x)=-3x^2-12x+2k$

함수 $f(x)$가 $x \geq 4$에서 감소하려면 이 구간에서

$f'(x)=-3x^2-12x+2k \leq 0$ …… ㉠

이어야 한다.

STEP 2 $f'(x)$의 최댓값 구하기

$f'(x)=-3(x+2)^2+2k+12$이므로 $x \geq 4$일 때, 함수 $f'(x)$는 $x=4$에서 최댓값

$f'(4)=2k-96$

을 갖는다.

STEP 3 k의 값의 범위 구하기

따라서 부등식 ㉠이 성립하려면

$2k-96 \leq 0$ $\therefore k \leq 48$

03-4 답 $\frac{3}{4}$

해결전략 | 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-a, a]$에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x) \geq 0$이어야 하므로 ($f'(x)$의 최솟값) ≥ 0이 성립하는 범위를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=x^3+2ax^2+ax-2$에서

$f'(x)=3x^2+4ax+a$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-a, a]$에서 증가하려면 이 구간에서

$f'(x)=3x^2+4ax+a \geq 0$ …… ㉠

이어야 한다.

STEP 2 $f'(x)$의 최솟값 구하기

$f'(x)=3\left(x+\frac{2}{3}a\right)^2-\frac{4}{3}a^2+a$이므로 $-a \leq x \leq a$일 때, 함수 $f'(x)$는 $x=-\frac{2}{3}a$에서 최솟값

$f'\left(-\frac{2}{3}a\right)=-\frac{4}{3}a^2+a$

를 갖는다.

STEP 3 a의 최댓값 구하기

따라서 부등식 ㉠이 성립하려면

$-\frac{4}{3}a^2+a\geq 0,\ 4a^2-3a\leq 0$

$a(4a-3)\leq 0 \qquad \therefore\ 0<a\leq\frac{3}{4}\ (\because\ a>0)$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{3}{4}$이다.

03-5 답 4

해결전략 | $f'(x)$의 최댓값 또는 최솟값을 구하기 어려운 경우에는 부등식의 해를 구하여 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2-1$에서

$f'(x)=-x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 $0<x<3$에서 증가하고, $x>10$에서 감소하려면

$0<x<3$에서 $f'(x)=-x^2+2ax\geq 0$ …… ㉠

$x>10$에서 $f'(x)=-x^2+2ax\leq 0$ …… ㉡

이어야 한다.

STEP 2 부등식 ㉠을 만족시키는 a의 값의 범위 구하기

부등식 ㉠에서

$-x(x-2a)\geq 0,\ x(x-2a)\leq 0$

이때 $a<0$이면 $2a\leq x\leq 0$

그런데 $0<x<3$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$a>0$

즉, 부등식 ㉠의 해가 $0\leq x\leq 2a$이므로

$2a\geq 3 \qquad \therefore\ a\geq\frac{3}{2}$ …… ㉢

STEP 3 부등식 ㉡을 만족시키는 a의 값의 범위 구하기

부등식 ㉡에서

$-x(x-2a)\leq 0,\ x(x-2a)\geq 0$

$\therefore\ x\leq 0$ 또는 $x\geq 2a\ (\because\ a>0)$

따라서 $2a\leq 10$이어야 하므로

$a\leq 5$ …… ㉣

STEP 4 정수 a의 개수 구하기

㉢, ㉣에서 $\frac{3}{2}\leq a\leq 5$

즉, 정수 a의 개수는 2, 3, 4, 5의 4이다.

03-6 답 9

해결전략 | 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 감소하는 함수임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=x^3-ax^2-(a+6)x-3$에서

$f'(x)=3x^2-2ax-a-6$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 주어진 조건을 만족시키려면 이 구간에서 감소해야 하므로

$f'(x)=3x^2-2ax-a-6\leq 0$ …… ㉠

이어야 한다.

STEP 2 구간을 나누어 a의 값의 범위 구하기

$f'(x)=3\left(x-\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}-a-6$이므로

(i) $\frac{a}{3}\leq -1$, 즉 $a\leq -3$일 때

함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최대이므로 최댓값은

$f'(0)=-a-6$

따라서 부등식 ㉠이 성립하려면

$-a-6\leq 0 \qquad \therefore\ a\geq -6$

그런데 $a\leq -3$이므로

$-6\leq a\leq -3$

(ii) $\frac{a}{3}\geq 0$, 즉 $a\geq 0$일 때

함수 $f'(x)$는 $x=-1$에서 최대이므로 최댓값은

$f'(-1)=a-3$

따라서 부등식 ㉠이 성립하려면

$a-3\leq 0 \qquad \therefore\ a\leq 3$

그런데 $a\geq 0$이므로

$0\leq a\leq 3$

STEP 3 a의 최댓값과 최솟값의 차 구하기

(i), (ii)에 의하여 a의 최댓값은 3, 최솟값은 -6이므로 구하는 차는

$3-(-6)=9$

참고 $-1<\frac{a}{3}<0$, 즉 $-3<a<0$인 경우에는 a의 값이 최대 또는 최소가 될 수 없다.

필수유형 04 153쪽

04-1 답 (1) $[-2, 3]$ (2) $(-\infty, -2]$, $[1, 4]$

해결전략 | 도함수의 그래프가 x축을 기준으로 아래쪽에 있는 구간에서 함수는 감소한다.

(1) **STEP 1** 그래프에서 $f'(x)$의 부호 판별하기

$y=f'(x)$의 그래프에서

$x\leq -2$ 또는 $x\geq 3$이면 $f'(x)\geq 0$

$-2\leq x\leq 3$이면 $f'(x)\leq 0$

STEP 2 감소하는 구간 구하기

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $[-2, 3]$이다.

(2) STEP 1 그래프에서 $g'(x)$의 부호 판별하기

$y=g'(x)$의 그래프에서

$-2\le x\le 1$ 또는 $x\ge 4$이면 $g'(x)\ge 0$

$x\le -2$ 또는 $1\le x\le 4$이면 $g'(x)\le 0$

STEP 2 감소하는 구간 구하기

따라서 함수 $g(x)$가 감소하는 구간은 $(-\infty, -2]$, $[1, 4]$이다.

04-2 답 -2

해결전략 | 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축의 아래쪽, 즉 $f'(x)\le 0$인 구간이 함수 $f(x)$가 감소하는 구간이다.

STEP 1 그래프에서 $f'(x)$의 부호 판별하기

$y=f'(x)$의 그래프에서

$-3\le x\le -1$ 또는 $x\ge 2$이면 $f'(x)\ge 0$

$x\le -3$ 또는 $-1\le x\le 2$이면 $f'(x)\le 0$

STEP 2 ab의 최솟값 구하기

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은

$(-\infty, -3]$, $[-1, 2]$

이므로 $a=-1$, $b=2$일 때, ab의 최솟값은 -2이다.

› 참고 구간 $(-\infty, -3]$에서 a, b를 정하면 $ab>0$

따라서 ab의 값이 최소가 될 수 없다.

04-3 답 $(-\infty, a]$, $[c, f]$

해결전략 | $f'(x)$, $g'(x)$의 그래프의 위치 관계를 이용하여 $h'(x)$의 부호를 구한다.

STEP 1 그래프에서 $h'(x)$의 부호 판별하기

$h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프에서

$x\le a$ 또는 $c\le x\le f$이면 $f'(x)\ge g'(x)$

$\therefore h'(x)\ge 0$

$a\le x\le c$ 또는 $x\ge f$이면 $f'(x)\le g'(x)$

$\therefore h'(x)\le 0$

STEP 2 $h(x)$가 증가하는 구간 구하기

따라서 함수 $h(x)$가 증가하는 구간은

$(-\infty, a]$, $[c, f]$

04-4 답 5

해결전략 | $AB\le 0$이면 $A\le 0$, $B\ge 0$ 또는 $A\ge 0$, $B\le 0$임을 이용한다.

STEP 1 부등식의 해 파악하기

$f'(x)\{f(x)-2\}\le 0$에서

$f'(x)\le 0$, $f(x)\ge 2$ 또는 $f'(x)\ge 0$, $f(x)\le 2$

STEP 2 그래프에서 각 경우의 해 구하기

(i) $f'(x)\le 0$, $f(x)\ge 2$일 때

열린구간 $(-3, 7)$에서 $f'(x)\le 0$을 만족시키는 정수 x의 값은

2, 3, 4, 5, 6

$f(x)\ge 2$를 만족시키는 정수 x의 값은

0, 1, 2, 3, 4

따라서 $f'(x)\le 0$, $f(x)\ge 2$를 동시에 만족시키는 정수 x의 값은 2, 3, 4

(ii) $f'(x)\ge 0$, $f(x)\le 2$일 때

열린구간 $(-3, 7)$에서 $f'(x)\ge 0$을 만족시키는 정수 x의 값은

-2, -1, 0, 1, 2

$f(x)\le 2$를 만족시키는 정수 x의 값은

-2, -1, 5, 6

따라서 $f'(x)\ge 0$, $f(x)\le 2$를 동시에 만족시키는 정수 x의 값은 -2, -1

STEP 3 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수 구하기

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 -2, -1, 2, 3, 4의 5이다.

› 참고 $(-\infty, 2]$에서 증가하므로 $f'(x)\ge 0$

$[2, \infty)$에서 감소하므로 $f'(x)\le 0$

필수유형 05 155쪽

05-1 답 -10

해결전략 | 함수 $f(x)$의 증감표를 그려 극대와 극소를 찾는다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=-2x^3+6x-5$에서

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

STEP 2 증감표 작성하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

STEP 3 $aM-bN$의 값 구하기

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로

$a=1$, $M=f(1)=-2+6-5=-1$

$x=-1$에서 극소이므로

$b=-1$, $N=f(-1)=2-6-5=-9$

$\therefore aM-bN=1\times(-1)-(-1)\times(-9)=-10$

05-2 답 $-\frac{70}{3}$

해결전략 | 함수 $f(x)$의 증감표를 그려 극대와 극소를 찾는다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{8}{3}x^3+6x^2+2$에서

$f'(x)=x^3-8x^2+12x=x(x-2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=6$

STEP 2 증감표 작성하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

STEP 3 극값의 합 구하기

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=6$에서 극소, $x=2$에서 극대이므로 모든 극값의 합은

$f(0)+f(2)+f(6)=2+\frac{26}{3}+(-34)=-\frac{70}{3}$

05-3 답 ②

해결전략 | 함수 $f(x)$의 증감표를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{9}{8}x^2-1$에서

$f'(x)=x^3+3x^2+\frac{9}{4}x=x\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=0$

STEP 2 증감표 작성하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

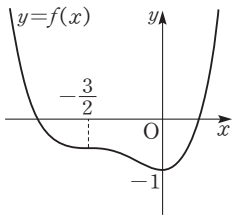
STEP 3 옳지 않은 것 찾기

① $x\geq0$에서 $f'(x)\geq0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

② $f'\left(-\frac{3}{2}\right)=0$이지만 $x=-\frac{3}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.

③ $f(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 극솟값은 $f(0)=-1$

④, ⑤ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 모든 사분면을 지난다.



풍쌤의 비법

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$가 $(x-a)^2$을 인수로 가지면 $f'(a)=0$이지만 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖지 않는다.

05-4 답 $y=-x+7$

해결전략 | 함수 $f(x)$의 증감표를 그려 극대와 극소를 찾는다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

STEP 2 증감표 작성하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

STEP 3 극대, 극소인 점을 지나는 직선의 방정식 구하기

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=2$에서 극소이고, $f(1)=6$, $f(2)=5$이므로 두 점 $(1, 6)$, $(2, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-6=\frac{5-6}{2-1}(x-1)$

$\therefore y=-x+7$

05-5 답 4

해결전략 | 함수 $f(x)$의 증감표를 그려 극대와 극소를 찾는다.

STEP 1 $Q'(t)=0$의 해 구하기

$Q(t)=t^3-5t^2+8t$에서

$Q'(t)=3t^2-10t+8=(3t-4)(t-2)$

$Q'(t)=0$에서 $t=\frac{4}{3}$ 또는 $t=2$

STEP 2 증감표 작성하기

함수 $Q(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	…	$\frac{4}{3}$	…	2	…
$Q'(t)$		+	0	−	0	+
$Q(t)$		↗	극대	↘	극소	↗

STEP 3 극솟값 구하기

따라서 함수 $Q(t)$는 $t=2$에서 극소이므로 구하는 극솟값은 $Q(2)=8-20+16=4$

05-6 답 $\frac{81}{16}$

해결전략 | 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 $x=a$에서 접하면 $f(x)-g(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.

STEP 1 $h'(x)=0$의 해 구하기

$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 $x=-2$, $x=1$에서 접하고, $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$h(x)=(x+2)^2(x-1)^2$

$\therefore h'(x)=2(x+2)(x-1)^2+2(x+2)^2(x-1)$

$=2(x+2)(x-1)\{(x-1)+(x+2)\}$

$=2(x+2)(x-1)(2x+1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

STEP 2 $h(x)$의 증감표 작성하기

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-2	…	$-\frac{1}{2}$	…	1	…
$h'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

STEP 3 극댓값 구하기

따라서 함수 $h(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$h\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2\times\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{81}{16}$

필수유형 06 157쪽

06-1 답 3

해결전략 | 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -1을 가지므로 $f'(1)=0$, $f(1)=-1$이다.

STEP 1 a, b에 대한 방정식 세우기

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -1을 가지므로

$f'(1)=0$, $f(1)=-1$

$f'(1)=3+2a+b=0$에서

$2a+b=-3$ …… ㉠

$f(1)=1+a+b+1=-1$에서

$a+b=-3$ …… ㉡

STEP 2 a, b의 값 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$

STEP 3 증감표 작성하기

$f(x)=x^3-3x+1$, $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

STEP 4 극댓값 구하기

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 구하는 극댓값은 $f(-1)=-1+3+1=3$

06-2 답 −24

해결전략 | 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$임을 이용한다.

STEP 1 a, b, c에 대한 방정식 세우기

$f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=-6x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극솟값, $x=-1$에서 극댓값 2를 가지므로

$f'(-2)=0$, $f'(-1)=0$, $f(-1)=2$

$f'(-2)=-24-4a+b=0$에서

$4a-b=-24$ …… ㉠

$f'(-1)=-6-2a+b=0$에서

$2a-b=-6$ …… ㉡

$f(-1)=2+a-b+c=2$에서

$a-b+c=0$ …… ㉢

STEP 2 $a+b+c$의 값 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9$, $b=-12$

이를 ㉢에 대입하면 $c=-3$

$\therefore a+b+c=-9+(-12)+(-3)=-24$

06-3 답 −2

해결전략 | 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 a로 나타낸다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=x^3+6ax^2+9a^2x+4$에서

$f'(x)=3x^2+12ax+9a^2=3(x+3a)(x+a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3a$ 또는 $x=-a$

STEP 2 a의 값 구하기

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3a$, $x=-a$에서 극값을 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은

$f(-3a)+f(-a)=4+(4-4a^3)=8-4a^3$

즉, $8-4a^3=40$이므로 $4a^3=-32$

$a^3=-8$ $\therefore a=-2$ ($\because a$는 실수)

참고 $a=-2$이므로 $f(x)=x^3-12x^2+36x+4$는 $x=2$에서 극댓값 $f(2)=36$, $x=6$에서 극솟값 $f(6)=4$를 갖는다.

06-4 답 $\frac{1}{2}$

해결전략 | 각 구간에서의 $f'(x)$를 구한 후 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 찾는다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x<0) \\ ax(x^2-12) & (x\geq 0) \end{cases}$에서

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+a & (x<0) \\ 3ax^2-12a & (x>0) \end{cases}$

$f'(x)=0$에서 $3ax^2-12a=0$ ($\because 3x^2+a>0$)

$3a(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x>0$)

STEP 2 증감표 작성하기

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+		−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

STEP 3 a의 값 구하기

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로

$f(2)=-16a=-8$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

참고 $f'(0)$의 값은 정의되지 않지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

06-5 답 3

해결전략 | 증감표를 그려 사차함수 $f(x)$의 극대가 되는 x의 값을 찾는다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=-x^4+8a^2x^2-1$에서

$f'(x)=-4x^3+16a^2x=-4x(x+2a)(x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2a$

STEP 2 증감표 작성하기

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2a$, $x=2a$에서 극대이고, $b>1$이므로

$b=2a$, $2-2b=-2a$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

06-6 답 −8

해결전략 | 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$와 $f'(x)$의 함숫값을 구한다.

STEP 1 주어진 조건 해석하기

조건 (가)에서 $x\to 1$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$

$x=1$에서의 미분계수의 정의야.

또, 조건 (나)에서 $f'(-2)=0$

STEP 2 a, b, c에 대한 방정식 세우기

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(1)=3$에서 $3+2a+b=3$

$\therefore 2a+b=0$ …… ㉠

$f'(-2)=0$에서 $12-4a+b=0$

$\therefore 4a-b=12$ …… ㉡

$f(1)=0$에서 $1+a+b+c=0$

$\therefore a+b+c=-1$ …… ㉢

STEP 3 abc의 값 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-4$

이를 ㉢에 대입하면 $c=1$

$\therefore abc=2\times(-4)\times 1=-8$

풍쌤의 비법

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=b$이면

$f(a)=0$, $f'(a)=b$

필수유형 07 159쪽

07-1 답 ㄱ, ㄴ

해결전략 | 함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 극대와 극소를 찾는다.

ㄱ. $x\geq 0$에서 $f'(x)\leq 0$이므로 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 감소한다. (참)

ㄴ. $f'(0)=0$이고, $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $f'(d)=0$이지만 $x=d$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=d$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07-2 답 8

해결전략 | 주어진 그래프를 이용하여 이차함수 $f'(x)$의 식을 구한다.

STEP 1 $f(x)$의 각 항의 계수 구하기

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(0)=0$, $f'(4)=0$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 0, 4이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2a}{3}=0+4=4$, $\frac{b}{3}=0\times 4=0$

$\therefore a=-6$, $b=0$

STEP 2 $f(x)$의 상수항 구하기

함수 $f(x)=x^3-6x^2+c$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값 -24를 가지므로

$f(4)=64-96+c=-24$ $\therefore c=8$

STEP 3 극댓값 구하기

즉, $f(x)=x^3-6x^2+8$이고, $f(x)$는 $x=0$에서 극대이므로 극댓값은 $f(0)=8$

07-3 답 19

해결전략 | 주어진 조건을 이용하여 도함수 $f'(x)$의 식을 구한다.

STEP 1 $f(x)$의 각 항의 계수 구하기

$f'(x)$가 이차함수이므로 $f(x)$는 삼차함수이다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$y=f'(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -1)$이므로

$f'(x)=3a(x-1)^2-1$

$=3ax^2-6ax+3a-1$

따라서 $2b=-6a$, $c=3a-1$이므로

$b=-3a$, $c=3a-1$

또, $y=f'(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 → $f'(0)=0$

$3a-1=0$

$\therefore a=\frac{1}{3}$, $b=-1$, $c=0$

STEP 2 $f(x)$의 상수항 구하기

$y=f'(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=1$이고 $f'(0)=0$이므로 $f'(2)=0$ → $x=1$에 대하여 대칭인 함수

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+d$는 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소이므로

$f(0)+f(2)=\frac{10}{3}$

$d+\left(d-\frac{4}{3}\right)=\frac{10}{3}$, $2d=\frac{14}{3}$

$\therefore d=\frac{7}{3}$

STEP 3 $f(5)$의 값 구하기

즉, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{7}{3}$이므로

$f(5)=\frac{125}{3}-25+\frac{7}{3}=19$

07-4 답 a, c

해결전략 | $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프를 이용하여 $h'(x)=0$의 해를 구한다.

STEP 1 $h(x)$의 증감표 작성하기

$h(x)=g(x)-f(x)$에서

$h'(x)=g'(x)-f'(x)$

$h'(x)=0$에서 $x=a$, $x=0$, $x=c$ → 두 그래프 $y=g'(x)$, $y=f'(x)$가 만나는 점의 x좌표

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$	c	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

STEP 2 극솟값을 갖는 x의 값 구하기

따라서 함수 $h(x)$는 $x=a$, $x=c$에서 극솟값을 갖는다.

07-5 답 3

해결전략 | $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)$가 삼차함수이므로 $f'(x)$는 이차함수이고,

$f'(-2)=f'(1)=0$이므로

$f'(x)=a(x+2)(x-1)$ $(a<0)$ → $y=f'(x)$의 그래프가 위로 볼록

로 놓을 수 있다.

또, $y=f'(x)$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$-2a=1$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore f'(x)=-\frac{1}{2}(x+2)(x-1)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$

STEP 2 $g(x)$의 증감표 작성하기

$g(x)=f(x)+x^2-x$에서

$g'(x)=f'(x)+2x-1=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}x(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

STEP 3 a의 값 구하기

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 가지므로

$a=3$

발전유형 08 161쪽

08-1 답 $a<0, b>0, c>0$

해결전략 | 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지면 $f'(\alpha)=0$임을 이용하여 함수 $y=f'(x)$의 그래프를 유추한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 두 실근 구하기

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극소이고, $x=\beta$에서 극대이므로

$f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$

STEP 2 a, b, c의 부호 구하기

$y=f(x)$의 그래프에서 $f(0)=c>0$

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

따라서 이차방정식 $-3x^2+2ax+b=0$의 두 실근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2a}{-3}=\alpha+\beta<0$ $(\because\ |\alpha|>|\beta|)$, $\frac{b}{-3}=\alpha\beta<0$

$\therefore a<0, b>0$

08-2 답 $a>0, b<0, c<0, d>0$

해결전략 | 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지면 $f'(\alpha)=0$임을 이용하여 함수 $y=f'(x)$의 그래프를 유추한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 두 실근의 부호 구하기

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대이고, $x=\beta$에서 극소라고 하면 $y=f(x)$의 그래프에서

$\alpha<0$, $\beta<0$이고

$f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$

STEP 2 a, b, c, d의 부호 구하기

$y=f(x)$의 그래프에서 $a>0$, $d>0$

또, $f(x)=ax^3-bx^2-cx+d$에서

$f'(x)=3ax^2-2bx-c$

따라서 이차방정식 $3ax^2-2bx-c=0$의 두 실근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

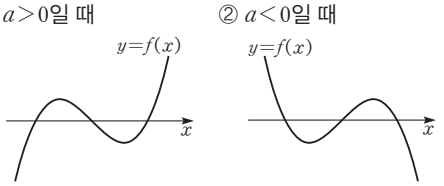
$-\frac{-2b}{3a}=\alpha+\beta<0$, $\frac{-c}{3a}=\alpha\beta>0$

이때 $a>0$이므로 $b<0$, $c<0$

풍쌤의 비법

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서 최고차항의 계수의 부호를 알 수 있다.

① $a>0$일 때 ② $a<0$일 때



08-3 답 ④

해결전략 | $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $x=\alpha$에서 극대이면 $x=-\alpha$에서 극소이다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 두 실근 구하기

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대라고 하면 $x=-\alpha$에서 극소이므로

$f'(\alpha)=0$, $f'(-\alpha)=0$

STEP 2 a, b, c의 부호 구하기

$y=f(x)$의 그래프에서 $a>0$

또, $f(x)=ax^3+bx^2+cx$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

따라서 이차방정식 $3ax^2+2bx+c=0$의 두 실근이 α, $-\alpha$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2b}{3a}=\alpha+(-\alpha)=0$, $\frac{c}{3a}=\alpha\times(-\alpha)<0$

이때 $a>0$이므로 $b=0$, $c<0$

STEP 3 옳은 것 찾기

① $a+b=a>0$ ② $a-c>0$

③ $b+c=c<0$ ④ $\frac{a}{c}<0$

⑤ $\frac{b}{c}=0$

따라서 옳은 것은 ④이다.

08-4 답 8

해결전략 | 그래프를 이용하여 a, b, c, d의 부호를 알아낸 후 주어진 식의 값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 두 실근의 부호 구하기

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극소이고, $x=\beta$에서 극대라고 하면

$\alpha>0$, $\beta>0$이고

$f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$

STEP 2 a, b, c, d의 부호 구하기

$y=f(x)$의 그래프에서 $a<0$, $d>0$

또, $f(x)=ax^3+bx^2-cx+d$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx-c$

따라서 이차방정식 $3ax^2+2bx-c=0$의 두 실근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2b}{3a}=\alpha+\beta>0$, $\frac{-c}{3a}=\alpha\beta>0$

이때 $a<0$이므로 $b>0$, $c>0$

STEP 3 식의 값 구하기

$\therefore \frac{|a|}{a}+\frac{2|b|}{b}+\frac{3|c|}{c}+\frac{4|d|}{d}$

$=\frac{-a}{a}+\frac{2b}{b}+\frac{3c}{c}+\frac{4d}{d}$

$=-1+2+3+4=8$

필수유형 09 163쪽

09-1 답 4

해결전략 | 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax-3$에서

$f'(x)=-x^2-2ax+3a$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

STEP 2 정수 a의 개수 구하기

따라서 이차방정식 $-x^2-2ax+3a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(-1)\times 3a\le 0$

$a^2+3a\le 0$, $a(a+3)\le 0$

$\therefore -3\le a\le 0$

따라서 정수 a의 개수는 -3, -2, -1, 0의 4이다.

09-2 답 10

해결전략 | 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지면 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=ax^3-ax^2+3x-5$에서

$f'(x)=3ax^2-2ax+3$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

STEP 2 자연수 a의 최솟값 구하기

따라서 이차방정식 $3ax^2-2ax+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3a\times 3>0$

$a^2-9a>0$, $a(a-9)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>9$

따라서 자연수 a의 최솟값은 10이다.

09-3 답 1

해결전략 | 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+6ax^2+9x-4$에서

$f'(x)=x^2+12ax+9$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

STEP 2 $M-m$의 값 구하기

따라서 이차방정식 $x^2+12ax+9=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(6a)^2-9\le 0$

$36a^2\le 9,\ a^2\le\frac{1}{4}$

$\therefore\ -\frac{1}{2}\le a\le\frac{1}{2}$

따라서 $M=\frac{1}{2},\ m=-\frac{1}{2}$이므로

$M-m=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

09-4 답 5

해결전략 | 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지면 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=x^3+ax^2+(a^2-4a)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a^2-4a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

STEP 2 정수 a의 개수 구하기

따라서 이차방정식 $3x^2+2ax+a^2-4a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-4a)>0$

$-2a^2+12a>0,\ a(a-6)<0$

$\therefore\ 0<a<6$

따라서 정수 a의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5이다.

09-5 답 7

해결전략 | $f'(x)=0$의 판별식을 이용하여 a, b에 대한 부등식을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-(b^2-7)x+1$에서

$f'(x)=x^2+2ax-(b^2-7)$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

STEP 2 a^2+b^2의 최댓값 구하기

따라서 이차방정식 $x^2+2ax-(b^2-7)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2+(b^2-7)\le 0\qquad\therefore\ a^2+b^2\le 7$

따라서 a^2+b^2의 최댓값은 7이다.

09-6 답 13

해결전략 | $f'(x)=0$의 판별식을 이용하여 a, b에 대한 부등식을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=ax^3+(b+2)x^2-\frac{1}{3}(a-4)x-4$에서

$f'(x)=3ax^2+2(b+2)x-\frac{1}{3}(a-4)$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

STEP 2 a, b에 대한 부등식 세우기

따라서 이차방정식 $3ax^2+2(b+2)x-\frac{1}{3}(a-4)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(b+2)^2-3a\times\left\{-\frac{1}{3}(a-4)\right\}\le 0$

$a^2-4a+(b+2)^2\le 0$

$\therefore\ (a-2)^2+(b+2)^2\le 4$

STEP 3 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기

(i) $a-2=\pm 2$, 즉 $a=4$ 또는 $a=0$일 때

$(b+2)^2\le 0$이므로 $b=-2$

(ii) $a-2=\pm 1$, 즉 $a=3$ 또는 $a=1$일 때

$(b+2)^2\le 3$이므로 b의 값은

$-3,\ -2,\ -1$

(iii) $a-2=0$, 즉 $a=2$일 때

$(b+2)^2\le 4$이므로 b의 값은

$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0$

(i)~(iii)에 의하여 순서쌍 (a, b)의 개수는

$2\times 1+2\times 3+1\times 5=13$

› **참고** $a=0,\ b=-2$이면 $f(x)=\frac{4}{3}x-4$이므로 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다. → 일차함수는 직선이므로 극값이 없어.

필수유형 10 165쪽

10-1 답 4

해결전략 | 사차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3+ax^2$에서

$f'(x)=x^3-6x^2+2ax$

사차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

STEP 2 자연수 a의 최댓값 구하기

$x^3-6x^2+2ax=0$에서

$x(x^2-6x+2a)=0$

위의 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-6x+2a=0$이 $x\neq0$인 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$a\neq0$ ····· ㉠

또, 이차방정식 $x^2-6x+2a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-2a>0 \quad \therefore a<\frac{9}{2}$

이때 ㉠에 의하여

$a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{2}$

따라서 자연수 a의 최댓값은 4이다.

참고 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 반드시 극솟값을 갖는다.

10-2 답 $a>\frac{2\sqrt{2}}{3}$

해결전략 | 최고차항의 계수가 양수인 사차함수가 극댓값을 가지면 극값을 갖는 x의 값이 3개임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=x^4+4ax^3+4x^2$에서

$f'(x)=4x^3+12ax^2+8x$

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

STEP 2 양수 a의 값의 범위 구하기

$4x^3+12ax^2+8x=0$에서

$4x(x^2+3ax+2)=0$

위의 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+3ax+2=0$이 $x\neq0$인 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+3ax+2=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(3a)^2-4\times2>0,\ a^2>\frac{8}{9}$

$\therefore a>\frac{2\sqrt{2}}{3}\ (\because a>0)$

10-3 답 $-\frac{1}{4}<a<2$ 또는 $a>2$

해결전략 | 최고차항의 계수가 음수인 사차함수가 극솟값을 가지면 극값을 갖는 x의 값이 3개임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=-x^4+2(a+1)x^2-4ax$에서

$f'(x)=-4x^3+4(a+1)x-4a$

최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

STEP 2 a의 값의 범위 구하기

$-4x^3+4(a+1)x-4a=0$에서

$-4(x-1)(x^2+x-a)=0$

위의 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+x-a=0$이 $x\neq1$인 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$1+1-a\neq0 \quad \therefore a\neq2$ ····· ㉠

또, 이차방정식 $x^2+x-a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=1^2-4\times(-a)>0 \quad \therefore a>-\frac{1}{4}$

이때 ㉠에 의하여

$-\frac{1}{4}<a<2$ 또는 $a>2$

10-4 답 $a\leq-\frac{1}{8}$ 또는 $a=0$

해결전략 | 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으므로 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖지 않는다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-ax^2$에서

$f'(x)=x^3-x^2-2ax$

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 또는 하나의 실근을 가져야 한다.

STEP 2 a의 값의 범위 구하기

$x^3-x^2-2ax=0$에서

$x(x^2-x-2a)=0$

위의 방정식이 서로 다른 두 실근 또는 하나의 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-x-2a=0$이 $x=0$을 근으로 갖거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) $x=0$을 근으로 가질 때

$a=0$

(ii) 중근 또는 허근을 가질 때

이차방정식 $x^2-x-2a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-1)^2-4\times(-2a)\le 0$

$\therefore a\le -\frac{1}{8}$

(i), (ii)에 의하여 $a\le -\frac{1}{8}$ 또는 $a=0$

10-5 답 2

해결전략 | 최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으므로 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖지 않는다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+ax^3+2ax^2$에서

$f'(x)=-x^3+3ax^2+4ax$

최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값만을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 또는 하나의 실근을 가져야 한다.

STEP 2 정수 a의 개수 구하기

$-x^3+3ax^2+4ax=0$에서

$-x(x^2-3ax-4a)=0$

위의 방정식이 서로 다른 두 실근 또는 하나의 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-3ax-4a=0$이 $x=0$을 근으로 갖거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) $x=0$을 근으로 가질 때

$a=0$

(ii) 중근 또는 허근을 가질 때

이차방정식 $x^2-3ax-4a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-3a)^2-4\times(-4a)\le 0$

$9a^2+16a\le 0,\ a(9a+16)\le 0$

$\therefore -\frac{16}{9}\le a\le 0$

(i), (ii)에 의하여 $-\frac{16}{9}\le a\le 0$

따라서 정수 a의 개수는 -1, 0의 2이다.

10-6 답 $\frac{2}{3}$

해결전략 | 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$는 반드시 극솟값을 가지므로 극값을 하나만 가지려면 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖지 않는다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=x^4-ax^3+(3a+4)x$에서

$f'(x)=4x^3-3ax^2+3a+4$

사차함수 $f(x)$가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 또는 하나의 실근을 가져야 한다.

STEP 2 $\alpha+\beta+\gamma$의 값 구하기

$4x^3-3ax^2+3a+4=0$에서

$(x+1)\{4x^2-(3a+4)x+3a+4\}=0$

위의 방정식이 서로 다른 두 실근 또는 하나의 실근을 가지려면 이차방정식 $4x^2-(3a+4)x+3a+4=0$이 $x=-1$을 근으로 갖거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) $x=-1$을 근으로 가질 때

$4x^2-(3a+4)x+3a+4=0$에 $x=-1$을 대입하면

$6a=-12 \quad \therefore a=-2$

(ii) 중근 또는 허근을 가질 때

이차방정식 $4x^2-(3a+4)x+3a+4=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(3a+4)^2-4\times4\times(3a+4)\le 0$

$(3a+4)(3a-12)\le 0$

$\therefore -\frac{4}{3}\le a\le 4$

(i), (ii)에 의하여 $a=-2$ 또는 $-\frac{4}{3}\le a\le 4$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-\frac{4}{3}$, $\gamma=4$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=-2+\left(-\frac{4}{3}\right)+4=\frac{2}{3}$

› 참고 $P(x)=4x^3-3ax^2+3a+4$로 놓으면

$P(-1)=0$

-1	4	$-3a$	0	$3a+4$
		-4	$3a+4$	$-3a-4$
	4	$-3a-4$	$3a+4$	0

위의 조립제법에 의하여 $P(x)$를 인수분해하면

$P(x)=(x+1)\{4x^2-(3a+4)x+3a+4\}$

발전유형 11 167쪽

11-1 답 3

해결전략 | 주어진 범위에서 함수 $f(x)$가 극값을 가지면 그 범위에서 $f'(x)=0$임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 근의 조건 구하기

$f(x)=-x^3+(a-3)x^2+ax+2$에서

$f'(x)=-3x^2+2(a-3)x+a$

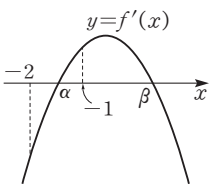
함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극솟값, $x=\beta$에서 극댓값을 갖

는다고 하면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이고

$-2<\alpha<-1$, $\beta>-1$

STEP 2 $y=f'(x)$의 그래프 그리기

따라서 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f'(-2)<0$, $f'(-1)>0$

STEP 3 $p+q$의 값 구하기

$f'(-2)=-3a<0$에서

$a>0$

$f'(-1)=-a+3>0$에서

$a<3$

$\therefore 0<a<3$

즉, $p=0$, $q=3$이므로

$p+q=3$

11-2 답 2

해결전략 | 주어진 범위에서 함수 $f(x)$가 극값을 가지면 그 범위에서 $f'(x)=0$임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 근의 조건 구하기

$f(x)=x^3-2ax^2-ax-4$에서

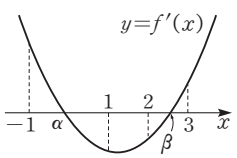
$f'(x)=3x^2-4ax-a$

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이고

$-1<\alpha<1$, $2<\beta<3$

STEP 2 $y=f'(x)$의 그래프 그리기

따라서 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f'(-1)>0$, $f'(1)<0$,

$f'(2)<0$, $f'(3)>0$

STEP 3 정수 a의 값 구하기

$f'(-1)=3+3a>0$에서 $a>-1$

$f'(1)=3-5a<0$에서 $a>\frac{3}{5}$

$f'(2)=12-9a<0$에서 $a>\frac{4}{3}$

$f'(3)=27-13a>0$에서 $a<\frac{27}{13}$

$\therefore \frac{4}{3}<a<\frac{27}{13}$

따라서 정수 a의 값은 2이다.

11-3 답 4

해결전략 | 주어진 범위에서 함수 $f(x)$가 극값을 가지면 그 범위에서 $f'(x)=0$임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 근의 조건 구하기

$f(x)=-x^3+ax^2+a^2x+2$에서

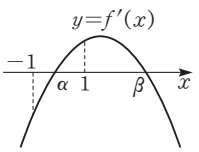
$f'(x)=-3x^2+2ax+a^2$

최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극솟값, $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다고 하면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이고

$-1<\alpha<1$, $\beta>1$

STEP 2 $y=f'(x)$의 그래프 그리기

따라서 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f'(-1)<0$, $f'(1)>0$

STEP 3 $p+q$의 값 구하기

$f'(-1)=-3-2a+a^2<0$에서

$(a+1)(a-3)<0$

$\therefore -1<a<3$ …… ㉠

$f'(1)=-3+2a+a^2>0$에서

$(a+3)(a-1)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1<a<3$

따라서 $p=1$, $q=3$이므로

$p+q=1+3=4$

11-4 답 2

해결전략 | $f'(x)=0$의 두 실근이 모두 양수임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 근의 조건 구하기

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(4a-6)x+4$에서

$f'(x)=x^2-2ax+4a-6$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 갖는다고 하면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이고

$\alpha>0$, $\beta>0$

STEP 2 정수 a의 최솟값 구하기

따라서 이차방정식 $x^2-2ax+4a-6=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 $x^2-2ax+4a-6=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(4a-6)>0$

$a^2-4a+6=(a-2)^2+2>0$

따라서 모든 실수 a에 대하여 항상 성립한다.

(ii) $\alpha+\beta=2a>0$이므로 $a>0$

(iii) $\alpha\beta=4a-6>0$이므로 $a>\frac{3}{2}$

(i)~(iii)에 의하여 $a>\frac{3}{2}$

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다.

풍쌤의 비법

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 α, β가 모두 양수이려면 다음이 모두 성립해야 한다.

① 판별식 D에 대하여 $D=b^2-4ac\geq 0$

② $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}>0$이므로 $ab<0$

③ $\alpha\beta=\frac{c}{a}>0$이므로 $ac>0$

11-5 답 $-\frac{1}{3}<a<0$

해결전략 | $f'(x)=0$의 두 실근이 열린구간 $(-2, 2)$에 존재할 조건을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 근의 조건 구하기

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2ax^2-4ax+1$에서

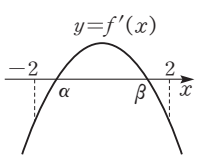
$f'(x)=-x^2+4ax-4a$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극솟값, $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다고 하면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이고

$-2<\alpha<\beta<2$

STEP 2 $y=f'(x)$의 그래프 그리기

따라서 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



STEP 3 a의 값의 범위 구하기

(i) 이차방정식

$-x^2+4ax-4a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-(-1)\times(-4a)>0$

$a(a-1)>0$ $\quad\therefore a<0$ 또는 $a>1$

(ii) $f'(-2)=-4-12a<0$에서 $a>-\frac{1}{3}$

$f'(2)=-4+4a<0$에서 $a<1$

$\therefore -\frac{1}{3}<a<1$

(iii) 축의 방정식이 $x=-\frac{4a}{-2}=2a$이므로

$-2<2a<2$ $\quad\therefore -1<a<1$

(i)~(iii)에 의하여 $-\frac{1}{3}<a<0$

풍쌤의 비법

이차방정식 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 서로 다른 두 근이 열린구간 (p, q)에 존재하려면 다음이 모두 성립해야 한다.

① 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D=b^2-4ac>0$

② $f(p)>0$, $f(q)>0$

③ $p<-\frac{b}{2a}<q$

참고 $a<0$이면 ② $f(p)<0$, $f(q)<0$이 성립해야 한다.

11-6 답 $2\leq a<6$

해결전략 | 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 경우와 갖지 않는 경우로 나누어 생각한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 근의 조건 구하기

$f(x)=x^3-3(a-3)x^2+3(a-1)x$에서

$f'(x)=3x^2-6(a-3)x+3a-3$

함수 $f(x)$가 $x\leq 1$에서 극값을 갖지 않으려면 $f(x)$가 극값을 갖지 않거나 $x>1$에서 극값을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖거나 두 실근이 모두 1보다 커야 한다.

STEP 2 $f(x)$가 $x\leq 1$에서 극값을 갖지 않도록 하는 a의 값의 범위 구하기

(i) $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는 경우

이차방정식 $3x^2-6(a-3)x+3a-3=0$,

즉 $x^2-2(a-3)x+a-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a-3)^2-(a-1)\leq 0$

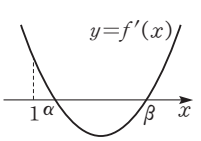
$a^2-7a+10\leq 0$, $(a-2)(a-5)\leq 0$

$\therefore 2\leq a\leq 5$

STEP 3 $f(x)$가 $x>1$에서 극값을 갖도록 하는 a의 값의 범위 구하기

(ii) 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 1보다 큰 경우

$y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



① 이차방정식

$x^2-2(a-3)x+a-1=0$

의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-3)^2\}-(a-1)>0$

$(a-2)(a-5)>0$ $\therefore a<2$ 또는 $a>5$

② $f'(1)=-3a+18>0$에서 $a<6$

③ 축의 방정식이 $x=-\frac{-2(a-3)}{2}=a-3$이므로

$a-3>1$ $\therefore a>4$

①~③에서 $5<a<6$

STEP 4 a의 값의 범위 구하기

(i), (ii)에 의하여 $2\le a<6$

발전유형 12 169쪽

12-1 답 ②

해결전략 | $f'(x)$의 부호를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 유추한다.

① 닫힌구간 $[b, c]$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

$\therefore f(b)<f(c)$

② 닫힌구간 $[i, j]$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

$\therefore f(i)<f(j)$

③ 닫힌구간 $[g, h]$에서 $f'(x)\le 0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

④ $f'(d)\ne 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=d$에서 극값을 갖지 않는다.

⑤ $f'(h)=0$이고 $x=h$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=h$에서 극솟값을 갖는다.

12-2 답 ㄱ, ㄷ

해결전략 | $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프의 위치 관계를 이용하여 함수 $h(x)$의 증감표를 작성한다.

STEP 1 $h(x)$의 증감표 작성하기

$h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

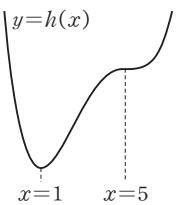
x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗		↗

STEP 2 보기의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. 닫힌구간 $[1, 5]$에서 $h'(x)\ge 0$이므로 함수 $h(x)$는 증가한다. (참)

ㄴ. 함수 $h(x)$는 $x=1$에서만 극값을 가지므로 한 개의 극값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $y=h(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 $h(a)\ge h(1)$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

12-3 답 ⑤

해결전략 | $f'(x)$의 부호를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 유추한다.

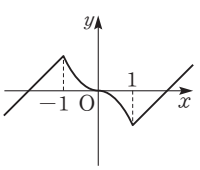
STEP 1 $f(x)$의 증감표 작성하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$-$		$+$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

STEP 2 $y=f(x)$의 그래프 유추하기

이때 $f(0)=0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지나므로 오른쪽 그림과 같다.



12-4 답 ㄱ, ㄴ

해결전략 | $y=g(x)$의 그래프를 이용하여 $f'(x)$의 부호를 구하고, 함수 $f(x)$의 증감표를 작성한다.

STEP 1 $f(x)$의 증감표 작성하기

$g(x)=\frac{f'(x)}{x}$에서 $f'(x)=xg(x)$

$f'(x)=0$에서 → $xg(x)=0$이므로 $x=0$ 또는 $g(x)=0$

$x=b$ 또는 $x=0$ 또는 $x=c$ 또는 $x=d$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	b	$\cdots$	0	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$
$g(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘	극소	↗

STEP 2 보기의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. 열린구간 $(b, 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다. (참)

ㄴ. $f'(b)=0$이고 $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=b$, $x=c$, $x=d$에서 극값을 가지므로 3개의 극값을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

필수유형 13 171쪽

13-1 답 3

해결전략 | 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증감표를 작성하여 최솟값을 찾는다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=x^3-3x+5$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

STEP 2 최솟값 구하기

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	23

따라서 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 3이다.

13-2 답 2

해결전략 | 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증감표를 작성하여 최댓값과 최솟값을 찾는다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=-x^3+3x^2-1$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

STEP 2 $a+b$의 값 구하기

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

따라서 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 3, 최솟값은 -1이므로

$a=3$, $b=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

13-3 답 25

해결전략 | 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증감표를 작성하여 최댓값과 최솟값을 찾는다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=x^4-8x^2-3$에서

$f(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ ($\because -3\le x\le 1$)

STEP 2 $M-N$의 값 구하기

닫힌구간 $[-3, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	6	$\searrow$	-19	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-10

따라서 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 6, 최솟값은 -19이므로

$M=6$, $N=-19$

$\therefore M-N=6-(-19)=25$

13-4 답 1

해결전략 | 도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증감표를 작성한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$y=f'(x)$의 그래프에서

$f'(-2)=0$, $f'(1)=0$

STEP 2 a의 값 구하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로

$a=1$

13-5 답 $\frac{11}{2}$

해결전략 | 함수 $f(x)$의 극값이 닫힌구간 $[-n, n]$에 포함되는 경우와 포함되지 않는 경우로 나누어 생각한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=-x^4-2x^3-1$에서

$f'(x)=-4x^3-6x^2=-2x^2(2x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=0$

STEP 2 $g(1)$의 값 구하기

(i) $n=1$일 때

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘		↘	-4

따라서 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 0이므로

$g(1)=0$

STEP 3 $n\geq 2$일 때 $g(n)$의 값 구하기

(ii) $n\geq 2$일 때

닫힌구간 $[-n, n]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-n$	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	n
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{11}{16}$	↘		↘	

따라서 닫힌구간 $[-n, n]$에서 함수 $f(x)$는

$x=-\frac{3}{2}$에서 극대이면서 최대이므로

$g(n)=\frac{11}{16}$

STEP 4 $g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(9)$의 값 구하기

(i), (ii)에서

$g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(9)=0+\frac{11}{16}\times 8=\frac{11}{2}$

13-6 답 19

해결전략 | 함수 $g(x)$의 치역이 함수 $f(x)$의 정의역임을 이용하여 함수 $f(x)$의 증감표를 작성한다.

STEP 1 $g(x)$의 치역 구하기

$g(x)=-x^2+2x-2$

$=-(x-1)^2-1$

이므로 $g(x)\leq -1$

STEP 2 $f'(t)=0$의 해 구하기

$g(x)=t$라고 하면 $t\leq -1$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)$

$f(t)=t^3-12t+3$에서

$f'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=-2$ ($\because t\leq -1$)

STEP 3 $(f\circ g)(x)$의 최댓값 구하기

$t\leq -1$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1
$f'(t)$	$+$	0	$-$	
$f(t)$	↗	19	↘	14

따라서 $t\leq -1$에서 함수 $f(t)$는 $t=-2$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 19이다.

필수유형 14 173쪽

14-1 답 −9

해결전략 | 주어진 구간에서 최대가 될만한 함숫값인 함수 $f(x)$의 극값과 양 끝점에서의 함숫값을 a로 나타내어 최댓값을 찾는다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=x^3+3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

STEP 2 a의 값 구하기

닫힌구간 $[-3, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	↗	$a+4$	↘	a	↗	$a+54$

따라서 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $a+54$이므로

$a+54=45$ $\therefore a=-9$

14-2 답 16

해결전략 | 주어진 구간에서 최소가 될만한 함숫값인 함수 $f(x)$의 극값과 양 끝 점에서의 함숫값을 a로 나타내고, 주어진 최솟값을 이용하여 a의 값과 최댓값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=-x^3+3x^2+a$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

STEP 2 a의 값 구하기

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$a+20$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$a+4$

따라서 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 a이므로 $a=-4$

STEP 3 최댓값 구하기

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은

$a+20=-4+20=16$

14-3 답 16

해결전략 | 주어진 구간에서 최소가 될만한 함숫값인 함수 $f(x)$의 극값과 양 끝 점에서의 함숫값을 a로 나타내고, 주어진 최솟값을 이용하여 a의 값과 최댓값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=ax^4+2ax^2-4a$에서

$f'(x)=4ax^3+4ax=4ax(x^2+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

STEP 2 a의 값 구하기

$a<0$이므로 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-a$	$\nearrow$	$-4a$	$\searrow$	$-a$

따라서 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-a$이므로

$-a=4 \quad \therefore a=-4$

STEP 3 최댓값 구하기

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은

$-4a=-4\times(-4)=16$

14-4 답 4

해결전략 | 주어진 구간에서 최대 · 최소가 될만한 함숫값인 함수 $f(x)$의 극값과 양 끝점에서의 함숫값을 k로 나타내어 최댓값, 최솟값을 찾는다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=x^4-2x^2+k$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

STEP 2 k의 값 구하기

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$k+8$	$\searrow$	$k-1$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$k-1$

따라서 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $k+8$, 최솟값은 $k-1$이므로

$(k+8)+(k-1)=15$, $2k=8$

$\therefore k=4$

14-5 답 $-\frac{5}{2}$

해결전략 | 주어진 구간에서 최대 · 최소가 될만한 함숫값인 함수 $f(x)$의 극값과 양 끝점에서의 함숫값을 a, b로 나타내어 최댓값, 최솟값을 이용하여 a, b의 관계식을 구한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=ax^3-3ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

STEP 2 $a+b$의 값 구하기

$a>0$이므로 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	$\searrow$	$b-4a$	$\nearrow$	$b+16a$

따라서 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $b+16a$, 최솟값은 $b-4a$이므로

$b+16a=5$, $b-4a=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=-3$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}+(-3)=-\frac{5}{2}$

14-6 답 1

해결전략 | 사차함수 $f(x)$가 $x=a$에서 최댓값을 가지려면 $x=a$에서 극대임을 이용한다.

STEP 1 a, b의 값 구하기

$f(x)=ax^4+2x^3-4x^2+b$에서

$f'(x)=4ax^3+6x^2-8x$

이때 사차함수 $f(x)$가 $x=4$에서 최댓값을 가지므로

$a<0$이고 $x=4$에서 극댓값 5를 갖는다.

즉, $f'(4)=0$이므로

$256a+64=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{4}$

또, $f(4)=5$이므로

$-64+128-64+b=5 \quad \therefore b=5$

STEP 2 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f'(x)=-x^3+6x^2-8x=-x(x-2)(x-4)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

STEP 3 극솟값 구하기

함수 $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^3-4x^2+5$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗	5	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$f(2)=1$

필수유형 15 175쪽

15-1 답 $\frac{512}{27}$

해결전략 | 점 A, B, C, D의 좌표를 t로 나타내어 사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값을 구한다.

STEP 1 사다리꼴의 꼭짓점의 좌표 정하기

곡선 $y=-2x^2+8$과 x축의 교점의 x좌표는

$-2x^2+8=0$에서 $x^2=4$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

$\therefore$ A$(-2, 0)$, B$(2, 0)$

또, 곡선 $y=-2x^2+8$ 위의 점 C의 x좌표를 t $(0<t<2)$라고 하면

C$(t, -2t^2+8)$, D$(-t, -2t^2+8)$

STEP 2 넓이에 대한 함수식 세우기

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times(2t+4)\times(-2t^2+8)$

$=-2t^3-4t^2+8t+16$

STEP 3 넓이의 최댓값 구하기

따라서 $S'(t)=-6t^2-8t+8=-2(t+2)(3t-2)$이므로

$S'(t)=0$에서 $t=\frac{2}{3}$ $(\because 0<t<2)$

함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	$\frac{512}{27}$	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $\frac{512}{27}$이다.

15-2 답 27

해결전략 | 점 A, B, C, D의 좌표를 t로 나타내어 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값을 구한다.

STEP 1 넓이에 대한 함수식 세우기

곡선 $y=-x^2+k$ 위의 점 D의 x좌표를 t $(0<t<\sqrt{k})$라고 하면

D$(t, -t^2+k)$

즉, A$(-t, -t^2+k)$, C$(t, 0)$이므로 직사각형 ABCD의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$S(t)=\overline{AD}\times\overline{CD}$

$=2t\times(-t^2+k)=-2t^3+2kt$

STEP 2 k의 값 구하기

따라서 $S'(t)=-6t^2+2k=-2(3t^2-k)$이므로

$S'(t)=0$에서 $t=\sqrt{\frac{k}{3}}$ $(\because 0<t<\sqrt{k})$

함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\sqrt{\frac{k}{3}}$	$\cdots$	$(\sqrt{k})$
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	$\frac{4k\sqrt{k}}{3\sqrt{3}}$	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\sqrt{\frac{k}{3}}$에서 극대이면서 최대이므로

$\frac{4k\sqrt{k}}{3\sqrt{3}}=108$, $\frac{k^3}{3^3}=27^2=3^6=9^3$

$k^3=(3\times9)^3 \quad \therefore k=27$

15-3 답 $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$

해결전략 | 주어진 곡선의 축을 이용하여 직사각형의 가로, 세로의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 넓이에 대한 함수식 세우기

곡선 $y=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$의 축의 방정식이 $x=2$이므로

B$(4-t,\ 0)$

또, D$(t,\ -t^2+4t)$이므로 직사각형 ABCD의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$S(t)=\overline{BC}\times\overline{CD}$

$=\{t-(4-t)\}\times(-t^2+4t)$

$=-2t^3+12t^2-16t$

STEP 2 넓이가 최대일 때의 t의 값 구하기

따라서 $S'(t)=-6t^2+24t-16$이므로

$S'(t)=0$에서 $3t^2-12t+8=0$

$\therefore t=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$ $(\because 2<t<4)$

함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(2)	…	$\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$	…	(4)
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$에서 극대이면서 최대이다.

15-4 답 $3\sqrt{3}$

해결전략 | 사각형 ABCD는 직사각형이므로 점 A와 점 D의 x좌표가 같음을 이용하여 각 꼭짓점의 좌표를 t로 나타낸다.

STEP 1 넓이에 대한 함수식 세우기

곡선 $y=-x^2+\dfrac{9}{4}$ 위의 점 A의 x좌표를 t $\left(0<t<\dfrac{3}{2}\right)$

라고 하면

$A\left(t,\ -t^2+\dfrac{9}{4}\right)$, $B\left(-t,\ -t^2+\dfrac{9}{4}\right)$

즉, 곡선 $y=x^2-\dfrac{9}{4}$ 위의 두 점 C, D의 좌표는

$\left(-t,\ t^2-\dfrac{9}{4}\right)$, $\left(t,\ t^2-\dfrac{9}{4}\right)$

이므로 직사각형 ABCD의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$S(t)=\overline{AB}\times\overline{AD}$

$=2t\times\left(-2t^2+\dfrac{9}{2}\right)$

$=-4t^3+9t$

STEP 2 넓이의 최댓값 구하기

따라서 $S'(t)=-12t^2+9=-12\left(t-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(t+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

이므로

$S'(t)=0$에서 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\because 0<t<\dfrac{3}{2}\right)$

함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	…	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	…	$\left(\frac{3}{2}\right)$
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	$3\sqrt{3}$	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $3\sqrt{3}$이다.

15-5 답 144

해결전략 | 점 P의 x좌표를 이용하여 삼각형 OHP의 넓이를 나타낸다.

STEP 1 넓이에 대한 함수식 세우기

곡선 $y=-\dfrac{1}{3}x^2+6x$ 위의 점 P의 x좌표를 t $(0<t<18)$

라고 하면

$P\left(t,\ -\dfrac{1}{3}t^2+6t\right)$

즉, H$(t,\ 0)$이므로 삼각형 OHP의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{PH}$

$=\dfrac{1}{2}\times t\times\left(-\dfrac{1}{3}t^2+6t\right)$

$=-\dfrac{1}{6}t^3+3t^2$

STEP 2 넓이의 최댓값 구하기

따라서 $S'(t)=-\dfrac{1}{2}t^2+6t=-\dfrac{1}{2}t(t-12)$이므로

$S'(t)=0$에서 $t=12$ $(\because 0<t<18)$

함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	…	12	…	(18)
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	144	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=12$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 144이다.

필수유형 16 177쪽

16-1 답 54 cm³

해결전략 | 잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 x로 나타내어 부피를 x에 대한 함수로 나타낸다.

STEP 1 부피에 대한 함수식 세우기

잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x cm $\left(0<x<\frac{9}{2}\right)$라고 하면 상자의 밑면은 한 변의 길이가 $(9-2x)$ cm인 정사각형이고, 높이는 x cm이므로 상자의 부피를 $V(x)$ cm^{3}라고 하면

$V(x)=x(9-2x)^2=4x^3-36x^2+81x$

STEP 2 부피의 최댓값 구하기

따라서

$V'(x)=12x^2-72x+81=3(2x-3)(2x-9)$이므로

$V'(x)=0$에서 $x=\frac{3}{2}$ $\left(\because 0<x<\frac{9}{2}\right)$

함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\left(\frac{9}{2}\right)$
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	54	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은 54이다.

즉, 구하는 부피의 최댓값은 54 cm^{3}이다.

16-2 답 4

해결전략 | 직각삼각형의 성질을 이용하여 삼각기둥의 부피를 x에 대한 함수로 나타낸다.

STEP 1 부피에 대한 함수식 세우기

상자의 밑면은 한 변의 길이가 $(24-2x)$ cm인 정삼각형이고, 높이는 $x\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ (cm)이므로 상자의 부피를 $V(x)$ cm^{3}라고 하면

$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(24-2x)^2\times\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$=x^3-24x^2+144x$

STEP 2 부피가 최대가 되도록 하는 x의 값 구하기

따라서

$V'(x)=3x^2-48x+144=3(x-4)(x-12)$이므로

$V'(x)=0$에서 $x=4$ $(\because 0<x<12)$

함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(12)
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

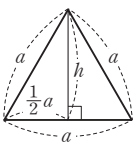
따라서 함수 $V(x)$는 $x=4$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 x의 값은 4이다.

풍쌤의 비법

정삼각형의 높이와 넓이

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이를 h, 넓이를 S라고 하면

① $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ② $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$



16-3 답 5

해결전략 | 높이를 이용하여 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 나타낸다.

STEP 1 부피에 대한 함수식 세우기

원기둥의 높이를 x $(0<x<15)$라고 하면 밑면의 반지름의 길이는 $15-x$이므로 원기둥의 부피를 $V(x)$라고 하면

$V(x)=x\times(15-x)^2\pi=(x^3-30x^2+225x)\pi$

STEP 2 부피가 최대가 되도록 하는 높이 구하기

따라서

$V'(x)=(3x^2-60x+225)\pi=3(x-5)(x-15)\pi$

이므로 $V'(x)=0$에서 $x=5$ $(\because 0<x<15)$

함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	5	$\cdots$	(15)
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=5$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 높이는 5이다.

16-4 답 81

해결전략 | 직육면체의 부피를 a를 이용하여 나타내고 주어진 범위에서의 최댓값을 찾는다.

STEP 1 부피에 대한 함수식 세우기

직육면체의 부피를 $V(a)$라고 하면

$V(a)=a^2\times(a-6)^2=a^4-12a^3+36a^2$

STEP 2 부피의 최댓값 구하기

따라서 $V'(a)=4a^3-36a^2+72a=4a(a-3)(a-6)$이므로 $V'(a)=0$에서 $a=3$ $(\because 0<a<6)$

함수 $V(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(6)
$V'(a)$		+	0	−	
$V(a)$		↗	81	↘	

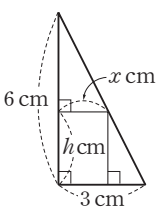
따라서 함수 $V(a)$는 $a=3$에서 극대이면서 최대이므로 직육면체의 부피의 최댓값은 81이다.

16-5 16π cm²

해결전략 | 삼각형의 닮음을 이용하여 원기둥의 높이와 밑면의 반지름의 길이 사이의 관계식을 구한다.

STEP 1 원기둥의 높이와 밑면의 반지름의 길이 사이의 관계식 구하기

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x cm $(0<x<3)$, 높이를 h cm라고 하면 삼각형의 닮음에 의하여



$6:3=(6-h):x$

$2x=6-h$

$\therefore h=6-2x$

STEP 2 부피에 대한 함수식 세우기

원기둥의 부피를 $V(x)$ cm³라고 하면

$V(x)=\pi x^2h=\pi x^2(6-2x)$

$=(-2x^3+6x^2)\pi$

STEP 3 부피가 최대가 되도록 하는 x의 값 구하기

따라서 $V'(x)=(-6x^2+12x)\pi=-6x(x-2)\pi$이므로

$V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0<x<3$)

함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이다.

STEP 4 겉넓이 구하기

$x=2$일 때 $h=2$이므로 구하는 원기둥의 겉넓이는

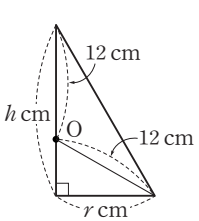
$2\times(\pi\times2^2)+(2\times2\pi\times2)=16\pi$ (cm²)

16-6 16 cm

해결전략 | 피타고라스 정리를 이용하여 원뿔의 밑면의 반지름의 길이와 높이 사이의 관계식을 구한다.

STEP 1 원뿔의 밑면의 반지름의 길이와 높이 사이의 관계식 구하기

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 O, 원뿔의 높이를 h cm $(0<h<24)$, 밑면의 반지름의 길이를 r cm라고 하면



$12^2=r^2+(h-12)^2$

$\therefore r^2=144-(h-12)^2=-h^2+24h$

STEP 2 부피에 대한 함수식 세우기

원뿔의 부피를 $V(h)$ cm³라고 하면

$V(h)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(-h^2+24h)h$

$=\left(-\frac{1}{3}h^3+8h^2\right)\pi$

STEP 3 부피가 최대가 되도록 하는 높이 구하기

따라서 $V'(h)=(-h^2+16h)\pi=-h(h-16)\pi$이므로

$V'(h)=0$에서 $h=16$ ($\because 0<h<24$)

함수 $V(h)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	(0)	$\cdots$	16	$\cdots$	(24)
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $V(h)$는 $h=16$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 원뿔의 높이는 16 cm이다.

유형 특강 179 쪽

1 풀이 참조

해결전략 | 함수의 차수와 최고차항의 계수, 도함수가 0이 되는 x의 값만을 이용하여 그래프의 개형을 간단하게 확인해 본다.

(1) **STEP 1** 함수의 차수와 최고차항의 계수 확인하기

$f(x)=-x^3+12x^2-45x+5$로 놓으면 함수 $f(x)$는 삼차함수이고, 삼차항의 계수가 음수이므로 그래프는 왼쪽 위에서 출발하여 오른쪽 아래로 내려간다.

STEP 2 $f'(x)=0$이 되는 x의 값 구하기

$f'(x)=-3x^2+24x-45$

$=-3(x-3)(x-5)$

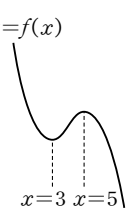
이므로

$f'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=5$

STEP 3 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형 그리기

이때 방정식 $f'(x)=0$은 중근을 갖지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$, $x=5$에서 극값을 갖는다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 왼쪽 위에서 출발하여 오른쪽 아래로 내려가는 그래프이며 $x=3$에서 극소, $x=5$에서 극대이다.



(2) **STEP 1** 함수의 차수와 최고차항의 계수 확인하기

$f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^3+9x^2-8x-3$으로 놓으면 함수

$f(x)$는 사차함수이고, 최고차항의 계수가 양수이므로 그래프는 왼쪽 위에서 출발하여 오른쪽 위로 올라간다.

STEP 2 $f'(x)=0$이 되는 x의 값 구하기

$f'(x)=2x^3-12x^2+18x-8$

$=2(x-1)^2(x-4)$

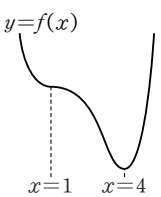
이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$(중근) 또는 $x=4$

STEP 3 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형 그리기

이때 방정식 $f'(x)=0$은 $x=1$에서 중근을 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않고, $x=4$에서 극값을 갖는다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 왼쪽 위에서 출발하여 오른쪽 위로 올라가는 그래프이며 $x=4$에서 극소이다.



(3) STEP 1 함수의 차수와 최고차항의 계수 확인하기

$f(x)=2x^3-6x^2+6x-4$로 놓으면 함수 $f(x)$는 삼차함수이고, 최고차항의 계수가 양수이므로 그래프는 왼쪽 아래에서 출발하여 오른쪽 위로 올라간다.

STEP 2 $f'(x)=0$이 되는 x의 값 구하기

$f'(x)=6x^2-12x+6=6(x-1)^2$

이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$(중근)

STEP 3 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형 그리기

이때 방정식 $f'(x)=0$은 $x=1$에서 중근을 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

즉, 극값이 없다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 왼쪽 아래에서 출발하여 오른쪽 위로 올라가는 그래프이며 극값은 없다.

(4) STEP 1 함수의 차수와 최고차항의 계수 확인하기

$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3+5x^2+2$로 놓으면 함수 $f(x)$는 사차함수이고, 최고차항의 계수가 음수이므로 그래프는 왼쪽 아래에서 출발하여 오른쪽 아래로 내려간다.

STEP 2 $f'(x)=0$이 되는 x의 값 구하기

$f'(x)=-x^3+3x^2+10x$

$=-x(x+2)(x-5)$

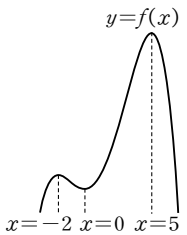
이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=5$

STEP 3 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형 그리기

이때 방정식 $f'(x)=0$은 중근을 갖지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=0$, $x=5$에서 극값을 갖는다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 왼쪽 아래에서 출발하여 오른쪽 아래로 다시 내려가는 그래프이며 $x=-2$, $x=5$에서 극대, $x=0$에서 극소이다.



실전 연습 문제 180~184쪽

01 ②	02 ③	03 ④	04 ①	
05 $a\le -1$	06 ④	07 ②	08 ③	09 16
10 5	11 ①	12 -1	13 ⑤	14 ②
15 $-\frac{25}{3}$	16 b, d	17 ④	18 ③	19 ⑤
20 ⑤	21 ③	22 ③	23 12	24 ①
25 1년 후	26 ⑤	27 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$		

01

해결전략 | $f(x)$가 증가하려면 $f'(x)\ge 0$이어야 함을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=-3x^3+6x^2+12x-3$에서

$f'(x)=-9x^2+12x+12=-3(3x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

STEP 2 $b-a$의 최댓값 구하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $\left[-\frac{2}{3}, 2\right]$에서 증가하므로 $b-a$의 최댓값은

$2-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}$

→ b가 최대, a가 최소일 때가 $b-a$의 최댓값이야.

02

해결전략 | $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 함수 $h(x)$의 증가, 감소를 파악한다.

STEP 1 $h(x)=f(x)-g(x)$의 증가, 감소 파악하기

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

이때 $f'(x)>g'(x)$이므로

$h'(x)>0$

즉, 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

STEP 2 보기의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $h(0)=f(0)-g(0)=0$이고 함수 $h(x)$가 증가하므로 $h(-1)<0$

즉, $f(-1)-g(-1)<0$이므로

$f(-1)<g(-1)$ (참)

ㄴ. $h(1)>0$이므로 $f(1)-g(1)>0$

$\therefore f(1)>g(1)$ (참)

ㄷ. $h(1)-h(3)<0$이므로

$f(1)-g(1)<f(3)-g(3)$

$\therefore f(1)-f(3)<g(1)-g(3)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

03

해결전략 | 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=x^3+ax^2+2ax$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+2a$

삼차함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 부등식

$f'(x)\geq 0$, 즉 $3x^2+2ax+2a\geq 0$

이 항상 성립해야 한다.

STEP 2 $M-m$의 값 구하기

따라서 이차방정식 $3x^2+2ax+2a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3\times 2a\leq 0$

$a(a-6)\leq 0$

$\therefore 0\leq a\leq 6$

따라서 $M=6$, $m=0$이므로

$M-m=6$

04

해결전략 | 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)$가 증가하거나 감소해야 함을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$에서

$f'(x)=x^2-2ax+3a$

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 하므로 부등식

$f'(x)\geq 0$, 즉 $x^2-2ax+3a\geq 0$

이 항상 성립해야 한다.

STEP 2 a의 최댓값 구하기

따라서 이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3a\leq 0$

$a(a-3)\leq 0$

$\therefore 0\leq a\leq 3$

따라서 a의 최댓값은 3이다.

05

해결전략 | 주어진 구간에서 $f'(x)\geq 0$이어야 함을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-3ax$에서

$f'(x)=-x^2+2x-3a$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, 3]$에서 증가하려면 이 구간에서

$f'(x)=-x^2+2x-3a\geq 0$ …… ㉠

이어야 한다. …… ❶

STEP 2 $f'(x)$의 최솟값 구하기

$f'(x)=-(x-1)^2-3a+1$이므로 $0\leq x\leq 3$일 때, 함수 $f'(x)$는 $x=3$에서 최솟값

$f'(3)=-3a-3$

을 갖는다. …… ❷

STEP 3 a의 값의 범위 구하기

따라서 부등식 ㉠이 성립하려면

$-3a-3\geq 0 \quad \therefore a\leq -1$ …… ❸

채점 요소	배점
❶ $f'(x)$의 조건 구하기	30 %
❷ 주어진 구간에서 $f'(x)$의 최솟값 구하기	50 %
❸ a의 값의 범위 구하기	20 %

06

해결전략 | 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 가지면 $f'(a)=0, f(a)=b$임을 이용한다.

STEP 1 $f(a)$, $f'(a)$의 값 구하기

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 β를 가지므로

$f'(a)=0$, $f(a)=\beta$

STEP 2 $g'(a)$의 값 구하기

$g(x)=x^3f(x)$에서 $g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

$\therefore g'(a)=3a^2f(a)+a^3f'(a)=3a^2\beta$

07

해결전략 | $f'(x)=0$의 해를 기준으로 함수 $f(x)$의 증감표를 작성한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

STEP 2 $a+M$의 값 구하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(1)=5$

즉, $a=1$, $M=5$이므로

$a+M=1+5=6$

08

해결전략 | $f'(x)=0$의 해를 기준으로 함수 $f(x)$의 증감표를 작성한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=-x^4-2x^3+5x^2+1$에서

$f'(x)=-4x^3-6x^2+10x$

$\quad=-2x(2x+5)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

STEP 2 증감표 작성하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{5}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

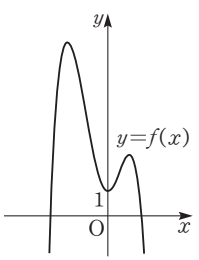
STEP 3 보기의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다. (참)

ㄴ. $f'\left(-\frac{5}{2}\right)=0$이고 $x=-\frac{5}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{5}{2}$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $f(0)=1$이므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 x축과 두 점에서 만난다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09

해결전략 | 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 가지면 $f'(a)=0$, $f(a)=b$임을 이용한다.

STEP 1 $g'(1)$, $g(1)$의 값 구하기

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가지므로

$g'(1)=0$, $g(1)=24$

STEP 2 $f(1)-f'(1)$의 값 구하기

$g(x)=(x^3+2)f(x)$에서

$g(1)=3f(1)$이므로 $f(1)=8$

또, $g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$이므로

$g'(1)=3f(1)+3f'(1)=24+3f'(1)$

즉, $24+3f'(1)=0$이므로 $f'(1)=-8$

$\therefore f(1)-f'(1)=8-(-8)=16$

10

해결전략 | 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$임을 이용한다.

STEP 1 a, b의 값 구하기

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

이때 함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=0$, $f'(1)=0$

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 -1, 1이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2a}{6}=0$, $\frac{b}{6}=-1$

$\therefore a=0$, $b=-6$ ····· ❶

STEP 2 c의 값 구하기

따라서 $f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)=2x^3-6x+c$는 $x=1$에서 극소이므로

$f(1)=-4+c=-3$ $\therefore c=1$ ····· ❷

STEP 3 $f(2)$의 값 구하기

즉, $f(x)=2x^3-6x+1$이므로

$f(2)=16-12+1=5$ ····· ❸

채점 요소	배점
❶ a, b의 값 구하기	50 %
❷ c의 값 구하기	30 %
❸ $f(2)$의 값 구하기	20 %

풍쌤의 비법

삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$에서 극값을 가질 때

① 최고차항의 계수가 양수이면 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이다.

② 최고차항의 계수가 음수이면 $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대이다.

11

해결전략 | 함수 $f(x)$의 극값을 a에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

STEP 2 $f(x)$의 극값 구하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이므로 극댓값은

$f(0)=a$

$x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$f(2)=a-4$

STEP 3 a의 값 구하기

이때 모든 극값의 곱이 -4이므로

$a(a-4)=-4$, $a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0$ $\therefore a=2$

12

해결전략 | $f(x)$, $f'(x)$의 부호를 이용하여 함수 $g(x)$의 증감표를 작성한다.

STEP 1 $g'(x)=0$의 해 구하기

$g(x)=\{f(x)\}^2$에서 $g'(x)=2f(x)f'(x)$

$g'(x)=0$에서 $f(x)=0$ 또는 $f'(x)=0$

$f(x)=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=c$ 또는 $x=e$

$f'(x)=0$의 해는 $x=b$ 또는 $x=c$ 또는 $x=d$

STEP 2 $g(x)$의 증감표 작성하기

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

STEP 3 $m-n$의 값 구하기

따라서 함수 $g(x)$는 $x=b$, $x=d$에서 극대, $x=a$, $x=c$, $x=e$에서 극소이므로 $m=2$, $n=3$

$\therefore m-n=2-3=-1$

13

해결전략 | 함수 $g(x)$가 $x=-3$에서 극값을 가지면 $g'(-3)=0$임을 이용한다.

STEP 1 $g'(x)$ 구하기

$g(x)=f(x)-kx$에서

$g'(x)=f'(x)-k$

STEP 2 k의 값 구하기

이때 함수 $g(x)$가 $x=-3$에서 극값을 가지므로

$g'(-3)=f'(-3)-k=0$

$\therefore k=f'(-3)=8$

14

해결전략 | 증가, 감소, 극대, 극소의 정의와 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

① [반례] $f(x)=-x^3$이면 $f(x)$는 감소함수이지만 $f'(0)=0$이다.

③ $f'(a)=0$이어도 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

바뀌지 않으면 $x=a$에서 극값을 갖지 않는다.

④ $f(x)$가 상수함수이면 모든 x의 값에서 극대이면서 극소이다.

⑤ $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 감소하다 증가하면 $f(a)\le f(x)$

따라서 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

그러므로 옳은 것은 ②이다.

15

해결전략 | $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f'(x)=0$의 해를 구한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(-2)=f'(0)=f'(1)=0$이므로 삼차방정식 $f'(x)=0$의 세 실근은 -2, 0, 1이다.

STEP 2 $f(x)$의 각 항의 계수 구하기

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{3a}{4}=-2+0+1=-1$

$\frac{2b}{4}=-2\times0+0\times1+1\times(-2)=-2$

$-\frac{c}{4}=(-2)\times0\times1=0$

$\therefore a=\frac{4}{3}$, $b=-4$, $c=0$ ····· ❶

STEP 3 $f(x)$의 상수항 구하기

$y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-2	⋯	0	⋯	1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+d$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로

$f(0)=2$ $\quad\therefore d=2$ ····· ❷

STEP 4 모든 극솟값의 합 구하기

즉, $f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+2$이고 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$f(-2)=-\frac{26}{3}$, $f(1)=\frac{1}{3}$

따라서 모든 극솟값의 합은 $-\frac{26}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{25}{3}$ ····· ❸

채점 요소	배점
❶ $f(x)$의 x^3, x^2, x 항의 계수 구하기	60 %
❷ $f(x)$의 상수항 구하기	20 %
❸ 모든 극솟값의 합 구하기	20 %

풍쌤의 비법

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근이 α, β, γ이면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

16

해결전략 | 주어진 그래프에서 $f'(x)=0$의 세 실근의 부호를 알아낸다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 세 실근의 부호 구하기

함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 α, β, γ라고 하면

$f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$, $f'(\gamma)=0$이고

$\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$

STEP 2 양수인 것 찾기

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$에서

$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

삼차방정식 $4ax^3+3bx^2+2cx+d=0$의 세 실근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{3b}{4a}=\alpha+\beta+\gamma>0$, $\frac{2c}{4a}=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha>0$,

$-\frac{d}{4a}=\alpha\beta\gamma>0$

이때 $y=f(x)$의 그래프에서 $a<0$, $e<0$이므로

$b>0$, $c<0$, $d>0$

따라서 양수인 것은 b, d이다.

17

해결전략 | 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+(a+3)x-2$에서

$f'(x)=x^2+ax+a+3$

이때 함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

STEP 2 자연수 a의 최솟값 구하기

따라서 이차방정식 $x^2+ax+a+3=0$의 판별식을 D라

고 하면

$D=a^2-4(a+3)>0$, $a^2-4a-12>0$

$(a+2)(a-6)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>6$

따라서 자연수 a의 최솟값은 7이다.

18

해결전략 | 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 또는 한 실근을 가져야 한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=x^4+ax^3+ax^2$에서

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2ax$

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 또는 한 실근을 가져야 한다.

STEP 2 정수 a의 개수 구하기

$4x^3+3ax^2+2ax=0$에서

$x(4x^2+3ax+2a)=0$

위의 방정식이 서로 다른 두 실근 또는 한 실근을 가지려면 이차방정식 $4x^2+3ax+2a=0$이 $x=0$을 근으로 갖거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) $x=0$을 근으로 가질 때

$a=0$

(ii) 중근 또는 허근을 가질 때

이차방정식 $4x^2+3ax+2a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(3a)^2-4\times4\times2a\le0$

$9a^2-32a\le0$, $a(9a-32)\le0$

$\therefore 0\le a\le\frac{32}{9}$

(i), (ii)에 의하여

$0\le a\le\frac{32}{9}$

따라서 정수 a의 개수는 0, 1, 2, 3의 4이다.

19

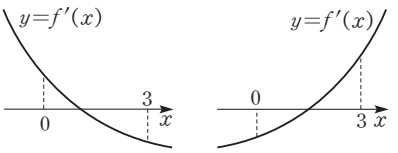
해결전략 | 주어진 조건을 만족시키는 $y=f'(x)$의 그래프의 개형을 생각한다.

STEP 1 조건을 만족시키는 $y=f'(x)$의 그래프 그리기

$f(x)=x^3-ax^2+2ax+1$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+2a$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(0, 3)$에서 극값을 1개 가지려면 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



STEP 2 자연수 a의 최솟값 구하기

즉, $f'(0)f'(3)<0$이어야 하므로

$2a(27-4a)<0$, $a(4a-27)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>\frac{27}{4}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 7이다.

20

해결전략 | $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $h(x)$의 증감표를 작성한다.

STEP 1 $h'(x)=0$의 해 구하기

$h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h'(x)=0$에서 $x=b$ 또는 $x=e$

STEP 2 $h(x)$의 증감표 작성하기

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	b	$\cdots$	e	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↘	극소	↗

STEP 3 옳은 것 찾기

① 구간 $[a, b]$에서 $h'(x)\le0$이므로 감소한다.

② 구간 $[e, \infty)$에서 $h'(x)\ge0$이므로 증가한다.

③ $h'(b)=0$이지만 $x=b$의 좌우에서 함수의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=b$에서 극값을 갖지 않는다.

④ $x=e$에서 극솟값을 가지므로 극값을 갖는 x의 값은 1개이다.

⑤ $x=e$에서 극소이면서 최소이다.

그러므로 옳은 것은 ⑤이다.

21

해결전략 | 주어진 구간에서 극값과 양 끝 점에서의 함숫값을 구하여 대소를 비교한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=x^3-3x^2+4$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1\le x\le4$)

STEP 2 $M+N$의 값 구하기

닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	20

따라서 닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 20, 최솟값은 0이므로

$M=20$, $N=0$

$\therefore M+N=20$

22

해결전략 I $f'(x)=0$의 해를 이용하여 함수 $f(x)$의 증감표를 작성한다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3-4x-1$에서

$f'(x)=-x^3+3x^2-4=-(x+1)(x-2)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

STEP 2 증감표 작성하기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$		$\searrow$

STEP 3 옳은 것 찾기

① 닫힌구간 $[-2, -1]$에서 $f'(x)\geq 0$이므로 증가한다.

② 닫힌구간 $[2, 3]$에서 $f'(x)\leq 0$이므로 감소한다.

④ $f'(2)=0$이지만 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다.

⑤ 열린구간 $(-2, 2)$에서 최댓값은 존재하지만 최솟값은 존재하지 않는다.

23

해결전략 I 주어진 구간에서 극값과 양 끝 점에서의 함숫값을 a에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 $f'(x)=0$의 해 구하기

$f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

STEP 2 증감표 작성하기

$a>0$이므로 닫힌구간 $[-a, a]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$2+a^3$	$\searrow$	$2-\frac{5}{27}a^3$	$\nearrow$	$2+a^3$

STEP 3 $a+M$의 값 구하기

따라서 닫힌구간 $[-a, a]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-a$ 또는 $x=a$에서 최댓값 $2+a^3$, $x=\frac{a}{3}$에서 최솟값 $2-\frac{5}{27}a^3$을 가지므로

$M=2+a^3$, $2-\frac{5}{27}a^3=\frac{14}{27}$

$\therefore a=2$, $M=10$

$\therefore a+M=2+10=12$

24

해결전략 I $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가, 감소, 극대, 극소를 파악한다.

STEP 1 증감표 작성하기

$y=f'(x)$의 그래프에서

$f'(-5)=f'(-2)=f'(5)=0$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	-2	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

STEP 2 보기의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. 닫힌구간 $[-5, 5]$에서 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-5$에서 극소, $x=5$에서 극대이므로 2개의 극값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. 열린구간 $(-6, 3)$에서 함수 $f(x)$는 최댓값을 갖지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

25

해결전략 I $P'(t)$를 이용하여 최댓값을 구한다.

STEP 1 $P'(t)=0$의 해 구하기

$P(t)=-\frac{1}{4}t^4+3t^3-12t^2+16t$에서

$P'(t)=-t^3+9t^2-24t+16$

$\quad=-(t-1)(t-4)^2$

$P'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=4$

STEP 2 몇 년 후에 이익이 최대가 되는지 구하기

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $P(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	…	1	…	4
$P'(t)$		+	0	−	0
$P(t)$		↗	극대	↘	0

따라서 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $P(t)$는 $t=1$일 때 극대이면서 최대이므로 1년 후에 이익이 최대가 된다.

26

해결전략 | 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이고 미분가능함을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f(x)$의 상수항과 x의 계수 구하기

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x<0)\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$$에서

$$g'(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ f'(x) & (x>0)\end{cases}$$

이때 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

즉, $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=g(0)$

$\therefore f(0)=\frac{1}{2}$

또, $g'(0)$의 값이 존재해야 하므로

$\lim\limits_{x\to 0-} g'(x)=\lim\limits_{x\to 0+} g'(x)$

$\therefore f'(0)=0$

따라서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라고 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$c=\frac{1}{2}$, $b=0$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$

STEP 2 ㄱ의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$ (참)

STEP 3 ㄴ의 참, 거짓 판별하기

ㄴ. $f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

이때 $a\geq 0$이면 $x\geq 0$에서 $f'(x)\geq 0$이므로 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$이다.

이는 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 $a<0$

$\therefore g(1)=f(1)=a+\frac{3}{2}<\frac{3}{2}$ (참)

STEP 4 ㄷ의 참, 거짓 판별하기

ㄷ. $a<0$이므로 $x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	…	$-\frac{2}{3}a$	…
$g'(x)$		−	+	+
$g(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{2}{3}a$에서 극소이면서 최소이므로

$g\left(-\frac{2}{3}a\right)=f\left(-\frac{2}{3}a\right)=0$

$-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+\frac{1}{2}=0$, $\frac{4}{27}a^3=-\frac{1}{2}$

$a^3=-\frac{27}{8}$ $\therefore a=-\frac{3}{2}$

즉, $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$이므로

$g(2)=f(2)=8-6+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

27

해결전략 | 직육면체의 높이를 a에 대한 식으로 나타내어 부피에 대한 함수를 구한다.

STEP 1 높이를 a에 대한 식으로 나타내기

직육면체의 높이를 h라고 하면 겉넓이가 16이므로

$2\times a^2+4a\times h=16$

$\therefore h=\frac{8-a^2}{2a}$ …… ❶

STEP 2 부피에 대한 함수식 세우기

직육면체의 부피를 $V(a)$라고 하면

$V(a)=a^2h=a^2\times\frac{8-a^2}{2a}$

$=-\frac{1}{2}a^3+4a$ …… ❷

STEP 3 부피가 최대일 때의 a의 값 구하기

따라서 $V'(a)=-\frac{3}{2}a^2+4$이므로

$V'(a)=0$에서 $\frac{3}{2}a^2=4$

$a^2=\frac{8}{3}$ $\therefore a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ($\because a>0$)

함수 $V(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$
$V'(a)$		$+$	0	$-$
$V(a)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $V(a)$는 $a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 a의 값은 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$이다. ····· ❸

채점 요소	배점
❶ 높이를 a에 대한 식으로 나타내기	30 %
❷ 부피에 대한 함수식 세우기	30 %
❸ 부피가 최대일 때의 a의 값 구하기	40 %

상위권 도약 문제 185~186쪽

01 ② **02** 10 **03** 54 **04** 6
05 -3 **06** ② **07** ② **08** $2\sqrt{2}$

01

해결전략 | 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$의 조건 구하기

$f(x)=x^3+3(a+2)x^2-3(b^2-2)x+2$에서

$f'(x)=3x^2+6(a+2)x-3(b^2-2)$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 증가하려면 부등식 $f'(x)\geq 0$, 즉 $x^2+2(a+2)x-(b^2-2)\geq 0$이 항상 성립해야 한다.

STEP 2 a, b에 대한 부등식 세우기

따라서 이차방정식 $x^2+2(a+2)x-(b^2-2)=0$의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(a+2)^2+(b^2-2)\leq 0$$

$$\therefore (a+2)^2+b^2\leq 2$$

STEP 3 $a+b$의 최솟값 구하기

이때 a, b가 정수이므로

(i) $b=0$일 때

$(a+2)^2\leq 2$이므로 a의 값은 -3, -2, -1

(ii) $b=\pm 1$일 때

$(a+2)^2\leq 1$이므로 a의 값은 -3, -2, -1

(i), (ii)에 의하여 $a+b$의 값은

-4, -3, -2, -1, 0

따라서 $a+b$의 최솟값은 -4이다.

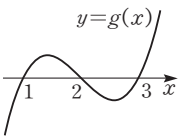
02

해결전략 | 함수 $g(x)$의 인수에 따라 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

STEP 1 조건을 만족시키는 $g(x)$ 구하기

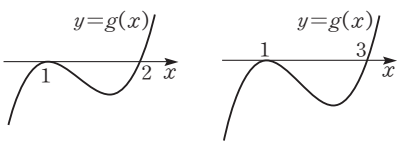
(i) $g(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)$인 경우

$y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다.



(ii) $g(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 갖는 경우

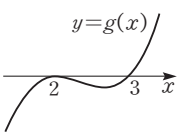
$y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 $x=2$에서 극댓값을 갖지 않는다.



(iii) $g(x)$가 $(x-2)^2$을 인수로 갖는 경우

$g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지려면 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

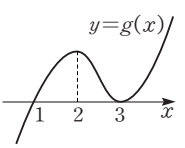
$g(x)=3(x-2)^2(x-3)$



(iv) $g(x)$가 $(x-3)^2$을 인수로 갖는 경우

$g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지려면 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$g(x)=3(x-1)(x-3)^2$



이때 $g'(x)=3(x-3)^2+6(x-1)(x-3)$이므로

$g'(2)\neq 0$

따라서 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$

STEP 2 $p+q$의 값 구하기

즉, $f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$에서

$$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$$

$$\therefore f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)(x-3)+\frac{1}{3}(x-1)^2$$

$$\therefore f'(0)=\frac{2}{3}\times(-1)\times(-3)+\frac{1}{3}\times(-1)^2=\frac{7}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=7$이므로

$p+q=3+7=10$

03

해결전략 | 주어진 등식을 만족시키는 함수 $f'(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy(x+y)$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)$ $\therefore f(0)=0$

$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=9$ …… ㉠

따라서 도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-xh(x+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-x^2=-x^2+9\ (\because\ ㉠)$$

STEP 2 증감표 작성하기

$f'(x)=-(x+3)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-3	…	3	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

STEP 3 $\alpha^3-\beta^3$의 값 구하기

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대이고 $x=-3$에서 극소이므로

$\alpha=3$, $\beta=-3$

$\therefore \alpha^3-\beta^3=27-(-27)=54$

04

해결전략 | 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 미분가능함을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

STEP 1 a, b의 관계식 구하기

함수 $g(x)=\begin{cases}b-f(x) & (x<3)\\ f(x) & (x\geq3)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=3$에서 미분가능하다.

따라서 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3-}g(x)=\lim_{x\to3+}g(x)=g(3)$

$b-f(3)=f(3)$

$\therefore b=2f(3)=6a-34$ …… ㉠

STEP 2 a, b의 값 구하기

또, $g'(x)=\begin{cases}-f'(x) & (x<3)\\ f'(x) & (x>3)\end{cases}$이고 $g'(3)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to3-}g'(x)=\lim_{x\to3+}g'(x)$

$-f'(3)=f'(3)$ $\therefore f'(3)=0$

이때 $f'(x)=3x^2-12x+a$이므로

$27-36+a=0$ $\therefore a=9$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x+10$

또, $a=9$를 ㉠에 대입하면

$b=20$

STEP 3 $g(x)$의 극솟값 구하기

따라서 $g'(x)=\begin{cases}-3x^2+12x-9 & (x<3)\\ 3x^2-12x+9 & (x\geq3)\end{cases}$이므로

$g'(x)=\begin{cases}-3(x-1)(x-3) & (x<3)\\ 3(x-1)(x-3) & (x\geq3)\end{cases}$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	1	…	3	…
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$g(1)=b-f(1)=20-14=6$

05

해결전략 | 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 모두 구한다.

STEP 1 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값 구하기

조건 (가)에서 $f(x)=f(4-x)$이므로 x 대신 $x+2$를 대입하면

$f(x+2)=f(2-x)$

즉, $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$f'(2)=0$

또, 조건 (나)에서

$f'(1)=0$, $f(1)=-4$

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고 $x=1$에서 극소이므로 $x=3$에서 극솟값 -4를 갖는다.

$\therefore f'(3)=0$, $f(3)=-4$

STEP 2 $f(x)$의 각 항의 계수 구하기

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

이때 삼차방정식 $f'(x)=0$의 세 근이 1, 2, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{3a}{4}=1+2+3=6$, $\frac{2b}{4}=1\times2+2\times3+3\times1=11$,

$-\frac{c}{4}=1\times2\times3=6$

$\therefore a=-8$, $b=22$, $c=-24$

STEP 3 $f(x)$의 상수항 구하기

따라서 $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+d$이고,

$f(1)=-4$이므로

$d-9=-4$ $\therefore d=5$

STEP 4 $f(2)$의 값 구하기

즉, $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+5$이므로

$f(2)=16-64+88-48+5=-3$

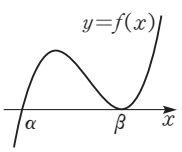
06

해결전략 | 조건을 만족시키는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 생각한다.

STEP 1 $f(x)$의 식을 α, β로 나타내기

조건 (가)에서 $f(x)=0$은 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$를 중근으로 갖는다.

이때 $x=\beta$가 중근이면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 극솟값이 0이다.



따라서 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 $f(x)=0$은 $x=\alpha$를 중근으로 갖는다.

$\therefore f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$

STEP 2 ㄱ의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)^2$이므로

$f'(\alpha)=0$ (참)

STEP 3 ㄴ의 참, 거짓 판별하기

ㄴ. $f'(x)=(x-\alpha)(3x-\alpha-2\beta)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\alpha$ 또는 $x=\frac{\alpha+2\beta}{3}$

이때 $\alpha<\frac{\alpha+2\beta}{3}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\alpha+2\beta}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

즉, $f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)=-4$이므로

$\left\{-\frac{2}{3}(\alpha-\beta)\right\}^2\times\frac{\alpha-\beta}{3}=-4$, $(\alpha-\beta)^3=-27$

$\alpha-\beta=-3$ $\therefore \beta=\alpha+3$ (참)

STEP 4 ㄷ의 참, 거짓 판별하기

ㄷ. $f(0)=16$이면 $\alpha^2\beta=-16$

ㄴ에서 $\beta=\alpha+3$이므로

$\alpha^2(\alpha+3)=-16$, $\alpha^3+3\alpha^2+16=0$

$(\alpha+4)(\alpha^2-\alpha+4)=0$

$\therefore \alpha=-4$ ($\because$ $\alpha^2-\alpha+4\neq0$)

즉, $\beta=\alpha+3=-1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-4)^2+(-1)^2=17$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07

해결전략 | 함수 $f(x)$의 최댓값을 a에 대한 식으로 나타내어 a의 값의 범위에 따라 $g(a)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

STEP 1 $f(x)$의 증감표 작성하기

$f(x)=x^2(x-3)$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−4	↗

STEP 2 $g(a)$ 값의 범위 구하기

(i) $-3\le a<-1$일 때

닫힌구간 $[a, a+1]$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 $f(x)$의 최댓값은 $f(a+1)$이다.

$\therefore g(a)=f(a+1)$

이때 $-2\le a+1<0$이므로 $-20\le f(a+1)<0$

$\therefore -20\le g(a)<0$

(ii) $-1\le a\le0$일 때

닫힌구간 $[a, a+1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극대이면서 최대이므로

$g(a)=f(0)=0$

(iii) $0<a\le1$일 때

닫힌구간 $[a, a+1]$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 $f(x)$의 최댓값은 $f(a)$이다.

$\therefore g(a)=f(a)$

이때 $0<a\le1$에서 $-2\le f(a)<0$이므로

$-2\le g(a)<0$

(i)~(iii)에 의하여 $-20 \le g(a) \le 0$

STEP 3 $p+q$의 값 구하기

따라서 $p=-20$, $q=0$이므로

$p+q=-20$

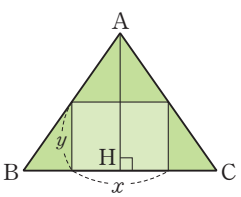
08

해결전략 | 직육면체의 가로의 길이와 높이 사이의 관계식을 구하여 부피에 대한 함수를 세운다.

STEP 1 직육면체의 가로의 길이와 높이 사이의 관계식 구하기

사각뿔에 내접하는 직육면체는 밑면이 정사각형이므로 밑면의 한 변의 길이를 x $(0<x<3)$, 높이를 y라고 하자.

오른쪽 그림과 같이 사각뿔의 꼭짓점을 지나고 직육면체의 옆면과 평행한 평면으로 자른 단면을 △ABC, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{AH}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

삼각형의 닮음에 의하여

$3:\frac{3\sqrt{2}}{2}=x:\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-y\right)$ → $\overline{BC}:\overline{AH}$

$\frac{3\sqrt{2}}{2}x=\frac{9\sqrt{2}}{2}-3y \quad \therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}(3-x)$

STEP 2 부피에 대한 함수식 구하기

따라서 직육면체의 부피를 $V(x)$라고 하면

$V(x)=x^2y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2(3-x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}x^3+\frac{3\sqrt{2}}{2}x^2$

STEP 3 부피의 최댓값 구하기

따라서 $V'(x)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}x^2+3\sqrt{2}x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}x(x-2)$

이므로 $V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0<x<3$)

함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	$2\sqrt{2}$	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

06 도함수의 활용(3)

개념확인 188~189쪽

01 답 (1) 3 (2) 2

(1) $f(x)=x^3-3x^2+3$으로 놓으면

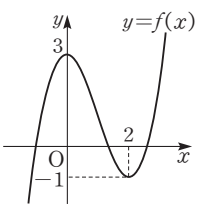
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^3-3x^2+3=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



(2) $f(x)=x^4-2x^2-1$로 놓으면

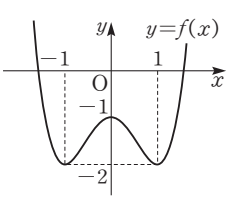
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^4-2x^2-1=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



02 답 풀이 참조

$f(x)=x^3-4x^2-3x+18$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-8x-3=(3x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because x \ge 0$)

$x \ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	18	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 $x \geq 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로 부등식 $f(x) \geq 0$, 즉 $x^3-4x^2-3x+18 \geq 0$이 성립한다.

03 답 (1) -5 (2) **14**

(1) 점 P의 속도를 v라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=9t^2-4t-10$$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$9-4-10=-5$

(2) 점 P의 가속도를 a라고 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=18t-4$$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는

$18-4=14$

04 답 **10**

시각 t에서의 넓이 S의 변화율은

$$\frac{dS}{dt}=6t-2$$

따라서 $t=2$에서의 넓이 S의 변화율은

$12-2=10$

필수유형 01

191쪽

01-1 답 (1) **1** (2) **4**

해결전략 | 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 조사한다.

(1) STEP 1 $y=f(x)$의 그래프 그리기

$f(x)=x^3+6x^2+9x-1$로 놓으면

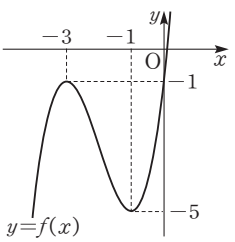
$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 서로 다른 실근의 개수 구하기

$y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^3+6x^2+9x-1=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

(2) STEP 1 $y=f(x)$의 그래프 그리기

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+2$로 놓으면

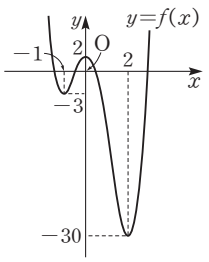
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-30	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 서로 다른 실근의 개수 구하기

$y=f(x)$의 그래프가 x축과 네 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $3x^4-4x^3-12x^2+2=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

01-2 답 **2**

해결전략 | 함수 $y=-2x^4+4x^2$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2인 경우를 구한다.

STEP 1 $y=-2x^4+4x^2$의 그래프 그리기

$2x^4-4x^2+k=0$에서

$-2x^4+4x^2=k$

$f(x)=-2x^4+4x^2$으로 놓으면

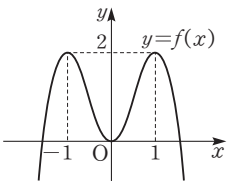
$f'(x)=-8x^3+8x=-8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 k의 최댓값 구하기

방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 두 점에서 만나야 하므로 $k=2$ 또는 $k<0$

즉, k의 최댓값은 2이다.

01-3 답 4

해결전략 | 함수 $y=x^3-3x^2-9x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3인 경우를 구한다.

STEP 1 $y=x^3-3x^2-9x$의 그래프 그리기

$x^3-3x^2-9x-k=0$에서 $x^3-3x^2-9x=k$

$f(x)=x^3-3x^2-9x$로 놓으면

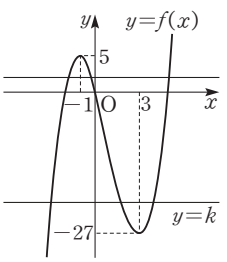
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	−27	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 정수 k의 최댓값 구하기

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 3개이어야 하므로

$-27<k<5$

따라서 정수 k의 최댓값은 4이다.

01-4 답 $k<-5$ 또는 $k>\frac{19}{9}$

해결전략 | $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 식을 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$y=f'(x)$의 그래프에서

$f'(0)=2$, $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$이므로

$c=2$

$3a-2b+2=0$ …… ㉠

$27a+6b+2=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{2}{9}$, $b=\frac{2}{3}$

이때 $f(0)=-1$에서 $d=-1$이므로

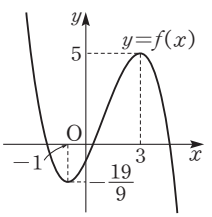
$f(x)=-\frac{2}{9}x^3+\frac{2}{3}x^2+2x-1$

STEP 2 $y=f(x)$의 그래프 그리기

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$-\frac{19}{9}$	↗	5	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 3 k의 값의 범위 구하기

방정식 $f(x)+k=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$의 교점이 1개이어야 하므로

$-k>5$ 또는 $-k<-\frac{19}{9}$

$\therefore k<-5$ 또는 $k>\frac{19}{9}$

01-5 답 26

해결전략 | $f(k)$는 함수 $y=x^3-12x$의 그래프와 직선 $y=20-4k$의 교점의 개수임을 이용한다.

STEP 1 $y=x^3-12x$의 그래프 그리기

$x^3-12x+4k-20=0$에서 $x^3-12x=20-4k$

$g(x)=x^3-12x$로 놓으면

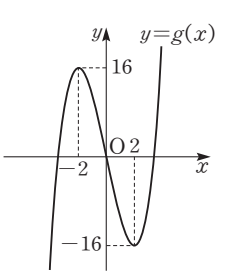
$g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	16	↘	−16	↗

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 $f(k)$의 값 구하기

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=20-4k$의 교점의 개수와 같으므로

(i) $20-4k>16$ 또는 $20-4k<-16$, 즉 $k<1$ 또는 $k>9$일 때

교점의 개수가 1이므로 $f(k)=1$

(ii) $20-4k=16$ 또는 $20-4k=-16$, 즉 $k=1$ 또는 $k=9$일 때

교점의 개수가 2이므로 $f(k)=2$

(iii) $-16<20-4k<16$, 즉 $1<k<9$일 때

교점의 개수가 3이므로 $f(k)=3$

STEP 3 식의 값 구하기

(i)~(iii)에 의하여

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$

$=2+3\times7+2+1=26$

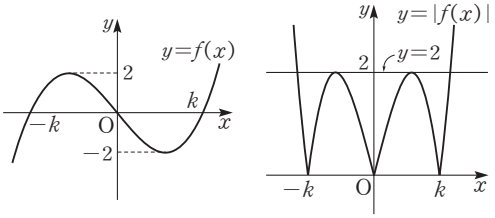
01-6 답 2

해결전략 | 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프를 이용한다.

STEP 1 $y=f(x)$의 그래프의 개형 그리기

$f(-x)=-f(x)$에서 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

또, $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근이 4개이므로 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



STEP 2 $f(x)$ 구하기

양수 k에 대하여

$f(x)=x(x+k)(x-k)=x^3-k^2x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-k^2$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm\frac{k}{\sqrt{3}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	$-\frac{k}{\sqrt{3}}$	…	$\frac{k}{\sqrt{3}}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{k}{\sqrt{3}}$에서 극솟값 -2를 가져야 하므로

$f\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)=\frac{k^3}{3\sqrt{3}}-\frac{k^3}{\sqrt{3}}=-2$, $k^3=3\sqrt{3}$

$\therefore k=\sqrt{3}$

$\therefore f(x)=x^3-3x$

STEP 3 $f(-1)$의 값 구하기

$\therefore f(-1)=-1+3=2$

필수유형 02 193쪽

02-1 답 −14

해결전략 | 함수 $y=-2x^3-3x^2+12x+3$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표의 부호를 조사한다.

STEP 1 $y=-2x^3-3x^2+12x+3$의 그래프 그리기

$f(x)=-2x^3-3x^2+12x+3$으로 놓으면

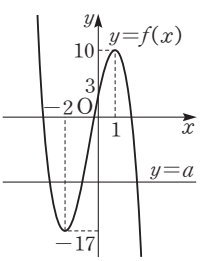
$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-2	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−17	↗	10	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 $M+m$의 값 구하기

주어진 방정식이 한 개의 양의 실근과 서로 다른 두 개의 음의 실근을 가지려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 1개는 양수이고 2개는 음수이어야 하므로

$-17<a<3$

따라서 정수 a의 최댓값은 2, 최솟값은 -16이므로

$M=2$, $m=-16$

$\therefore M+m=2+(-16)=-14$

02-2 답 5

해결전략 | 함수 $y=3x^3-9x-2$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표의 부호를 조사한다.

STEP 1 $y=3x^3-9x-2$의 그래프 그리기

$f(x)=g(x)$에서

$4x^3-2=x^3+9x+a$

$\therefore 3x^3-9x-2=a$

$h(x)=3x^3-9x-2$로 놓으면

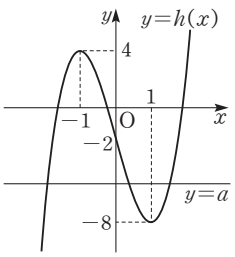
$h'(x)=9x^2-9=9(x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	4	↘	-8	↗

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 정수 a의 개수 구하기

주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가지려면 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 1개는 음수이고 2개는 양수이어야 하므로

$-8<a<-2$

따라서 정수 a의 개수는 -7, -6, $\cdots$, -3의 5이다.

02-3 답 26

해결전략 | $f(k)$는 함수 $y=2x^3-6x^2$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수임을 이용한다.

STEP 1 $y=2x^3-6x^2$의 그래프 그리기

$2x^3-6x^2-k=0$에서 $2x^3-6x^2=k$

$g(x)=2x^3-6x^2$으로 놓으면

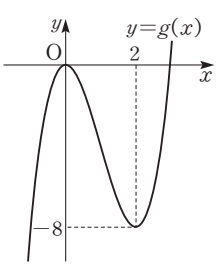
$g'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	0	↘	-8	↗

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 $f(k)$의 값 구하기

$f(k)$는 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수이므로

$k<-8$이면 $f(k)=0$

$k=-8$이면 $f(k)=1$

$-8<k<0$이면 $f(k)=2$

$k\geq 0$이면 $f(k)=1$

STEP 3 식의 값 구하기

$\therefore f(-10)+f(-9)+f(-8)+\cdots+f(10)$

$=0\times 2+1+2\times 7+1\times 11=26$

02-4 답 8

해결전략 | 함수 $y=-2x^3-6x^2$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점 중 2개의 x좌표가 $-2\leq x\leq 2$를 만족시키는 a의 값의 범위를 구한다.

STEP 1 $y=-2x^3-6x^2$의 그래프 그리기

$2x^3+6x^2+a=0$에서 $-2x^3-6x^2=a$

$f(x)=-2x^3-6x^2$으로 놓으면

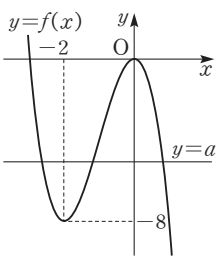
$f'(x)=-6x^2-12x=-6x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-8	↗	0	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 정수 a의 개수 구하기

주어진 방정식이 $-2\leq x\leq 2$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 3개이고 교점 중 2개의 x좌표가 $-2\leq x\leq 2$를 만족시켜야 하므로

$-8\leq a<0$ → $a=0$이면 $-2\leq x\leq 2$에서 한 실근(중근)을 갖는다.

따라서 정수 a의 개수는 -8, -7, $\cdots$, -1의 8이다.

02-5 답 ㄱ, ㄷ

해결전략 | $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

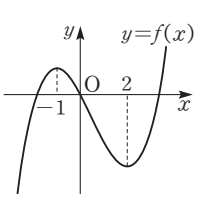
STEP 1 $y=f(x)$의 그래프 그리기

$y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(-1)=f'(2)=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=2$에서 극소이므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 보기의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $a>f(-1)$이면 직선 $y=a$는 $y=f(x)$의 그래프와 한 점에서 만나고 교점의 x좌표가 양수이므로 방정식 $f(x)=a$는 한 개의 양의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(2)<a<f(0)$이면 방정식 $f(x)=a$는 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖고, $f(0)<a<f(-1)$이면 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $a=f(2)$이면 직선 $y=a$는 $y=f(x)$의 그래프와 두 점에서 만나고 교점의 x좌표가 1개는 2, 1개는 음수이므로 방정식 $f(x)=a$는 한 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

02-6 답 $a>1$

해결전략 I $g(x)=0$의 두 실근이 α, β이면 $g(f(x))=0$의 근은 $f(x)=\alpha$, $f(x)=\beta$의 근임을 이용한다.

STEP 1 $y=f(x)$의 그래프의 조건 구하기

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=0$에서

$\{f(x)\}^2+5a^2f(x)=0$, $f(x)\{f(x)+5a^2\}=0$

$\therefore f(x)=0$ 또는 $f(x)=-5a^2$

따라서 주어진 방정식이 한 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 함수 $y=0$, $y=-5a^2$의 교점의 x좌표가 1개는 양수, 1개는 음수이어야 한다.

STEP 2 $y=f(x)$의 그래프 그리기

$f(x)=x^3-3x^2-a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

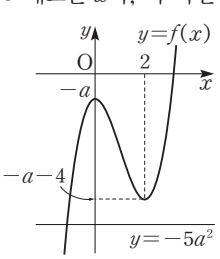
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$-a$	↘	$-a-4$	↗

STEP 3 a의 값의 범위 구하기

$-a\geq 0$, 즉 $a\leq 0$이면 $y=f(x)$의 그래프는 x축, 즉 직선 $y=0$과 2개 이상의 점에서 만나므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a>0$ …… ㉠

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=0$의 교점이 1개이고 교점의 x좌표가 양수이므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-5a^2$의 교점이 1개이고 교점의 x좌표가 음수이어야 한다.

$-5a^2<-a-4$, $5a^2-a-4>0$

$(5a+4)(a-1)>0$

$\therefore a<-\frac{4}{5}$ 또는 $a>1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a>1$

필수유형 03 195쪽

03-1 답 15

해결전략 I (극댓값)×(극솟값)<0인 k의 값의 범위를 구한다.

STEP 1 증감표 작성하기

$f(x)=4x^3-12x+k$로 놓으면

$f'(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$k+8$	↘	$k-8$	↗

STEP 2 정수 k의 개수 구하기

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$(k+8)(k-8)<0$

$\therefore -8<k<8$

따라서 정수 k의 개수는 -7, -6, …, 7의 15이다.

03-2 답 12

해결전략 I (극댓값)×(극솟값)=0인 k의 값을 구한다.

STEP 1 증감표 작성하기

$f(x)=x^3-x^2-8x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x-8=(3x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$k+\frac{176}{27}$	↘	$k-12$	↗

STEP 2 k의 값 구하기

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면

$\left(k+\frac{176}{27}\right)(k-12)=0$

$\therefore k=12$ ($\because k>0$)

03-3 답 21

해결전략 I (극댓값)×(극솟값)>0인 a의 값의 범위를 구한다.

STEP 1 증감표 작성하기

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-1	⋯	2	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$a+7$	↘	$a-20$	↗

STEP 2 자연수 a의 최솟값 구하기

주어진 방정식이 한 개의 실근을 가지려면

$(a+7)(a-20)>0$

$\therefore a<-7$ 또는 $a>20$

따라서 자연수 a의 최솟값은 21이다.

03-4 답 ④

해결전략 I 방정식 $f(x)=0$의 해의 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 극값의 부호를 구한다.

STEP 1 증감표 작성하기

$y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	α	⋯	β	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

STEP 2 $f(\alpha)$, $f(\beta)$의 부호 구하기

방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지므로

$f(\alpha)f(\beta)<0$

$\therefore f(\alpha)>0$, $f(\beta)<0$ ($\because f(\alpha)>f(\beta)$)

STEP 3 옳은 것 찾기

① $f(\alpha)+f(\beta)$의 값의 부호는 알 수 없다.

② $f(\alpha)-f(\beta)>0$

③ $\{f(\alpha)\}^2-\{f(\beta)\}^2$의 값의 부호는 알 수 없다.

④ $f(\alpha)-f(\beta)>0$이므로 $\{f(\alpha)\}^3-\{f(\beta)\}^3>0$

⑤ $f(0)$의 값의 부호를 알 수 없으므로 $f(\alpha)f(0)f(\beta)$의 값의 부호는 알 수 없다.

03-5 답 12

해결전략 I 삼차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 한 실근과 중근을 갖는 것이므로 (극댓값)×(극솟값)=0이다.

STEP 1 증감표 작성하기

$f(x)=\frac{1}{3}mx^3-\frac{1}{2}nx^2+1$로 놓으면

$f'(x)=mx^2-nx=x(mx-n)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{n}{m}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	0	⋯	$\frac{n}{m}$	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	$1-\frac{n^3}{6m^2}$	↗

STEP 2 $m+n$의 값 구하기

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$1-\frac{n^3}{6m^2}=0$ $\quad\therefore n^3=6m^2$

이때 m, n은 한 자리 자연수이므로

$m=6$, $n=6$

$\therefore m+n=6+6=12$

필수유형 04 197쪽

04-1 답 $-20<k<7$

해결전략 I 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$의 교점의 개수를 이용한다.

STEP 1 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$로 변형하기

곡선 $y=2x^3+3x^2-10x$와 직선 $y=2x-k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $2x^3+3x^2-10x=2x-k$, 즉 $2x^3+3x^2-12x=-k$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

따라서 $f(x)=2x^3+3x^2-12x$로 놓으면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

STEP 2 $y=f(x)$의 그래프 그리기

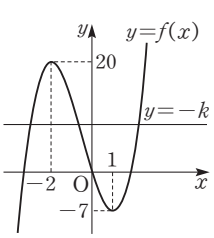
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-2	⋯	1	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 3 k의 값의 범위 구하기

직선 $y=-k$가 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나려면

$-7<-k<20$

$\therefore\ -20<k<7$

◉→ 다른 풀이

방정식 $2x^3+3x^2-10x=2x-k$, 즉

$2x^3+3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 $g(x)=2x^3+3x^2-12x+k$로 놓으면

$g'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$g(-2)g(1)<0$, $(k+20)(k-7)<0$

$\therefore\ -20<k<7$

04-2 답 2

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2a$의 교점의 개수를 이용한다.

STEP 1 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2a$로 변형하기

두 곡선 $y=x^3-3x^2$, $y=3x^2-9x+2a$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $x^3-3x^2=3x^2-9x+2a$,

즉 $x^3-6x^2+9x=2a$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x$로 놓으면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

STEP 2 $y=f(x)$의 그래프 그리기

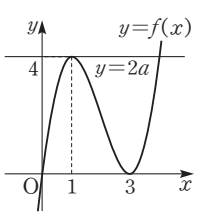
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 3 a의 값 구하기

직선 $y=2a$가 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나려면

$2a=0$ 또는 $2a=4$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

◉→ 다른 풀이

방정식 $x^3-3x^2=3x^2-9x+2a$,

즉 $x^3-6x^2+9x-2a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $g(x)=x^3-6x^2+9x-2a$로 놓으면

$g'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$g(1)g(3)=0$, $(4-2a)\times(-2a)=0$

$a(a-2)=0$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

04-3 답 6

해결전략 | 그래프의 교점의 개수가 4가 되도록 하는 k의 값의 범위를 a에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=k$로 변형하기

$f(x)=x^4+a$, $g(x)=4x^2+k$의 그래프의 교점의 개수가 4이려면 방정식 $x^4+a=4x^2+k$, 즉 $x^4-4x^2+a=k$가 서로 다른 네 실근을 가져야 한다.

따라서 $h(x)=x^4-4x^2+a$로 놓으면 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.

STEP 2 $y=h(x)$의 그래프 그리기

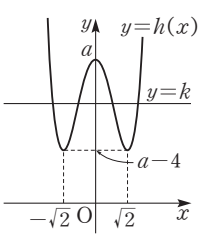
$h'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$이므로

$h'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$h(x)$	↘	$a-4$	↗	a	↘	$a-4$	↗

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 3 a의 값 구하기

직선 $y=k$와 $y=h(x)$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나려면

$a-4<k<a$

따라서 정수 k의 최솟값은 $a-3$이므로

$a-3=3$

$\therefore\ a=6$

04-4 답 $a>-3$

해결전략 | a의 값의 범위를 나누어 곡선 $y=2x^3-ax^2-1$의 개형을 그려 본다.

STEP 1 곡선 $y=f(x)$의 조건으로 변형하기

두 곡선 $y=2x^3-1$, $y=ax^2$이 한 점에서 만나려면 방정식 $2x^3-1=ax^2$, 즉 $2x^3-ax^2-1=0$이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

따라서 $f(x)=2x^3-ax^2-1$로 놓으면 곡선 $y=f(x)$가 x축과 한 점에서 만나야 한다.

STEP 2 a의 값의 범위 구하기

$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$이므로 $f'(x)=0$에서

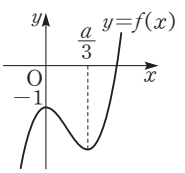
$x=0$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

(i) $a>0$일 때

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	0	…	$\frac{a}{3}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	-1	↘	$-\frac{a^3}{27}-1$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x축과 한 점에서 만난다.



(ii) $a=0$일 때

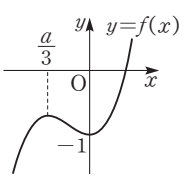
$f'(x)\geq 0$에서 함수 $f(x)$는 증가하는 함수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다.

(iii) $a<0$일 때,

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	$\frac{a}{3}$	…	0	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$-\frac{a^3}{27}-1$	↘	-1	↗

따라서 오른쪽 그림에서



$-\frac{a^3}{27}-1<0$

$a^3+27>0$

$(a+3)(a^2-3a+9)>0$

$\therefore\ -3<a<0\ (\because a^2-3a+9>0)$

(i)~(iii)에 의하여 $a>-3$

◉→ 다른 풀이

$f(x)=2x^3-ax^2-1$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

(i) $a=0$일 때

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으므로 방정식 $f(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.

(ii) $a\neq 0$일 때

함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=\frac{a}{3}$에서 극값을 가지므로 방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면

$f(0)f\left(\frac{a}{3}\right)>0$, $(-1)\times\left(-\frac{a^3}{27}-1\right)>0$

$\frac{1}{27}a^3+1>0$, $a^3+27>0$

$(a+3)(a^2-3a+9)>0$

$\therefore\ -3<a<0$ 또는 $a>0\ (\because a^2-3a+9>0)$

(i), (ii)에 의하여 $a>-3$

04-5 답 19

해결전략 | 주어진 조건을 이용하여 함수 $f(x)$의 극값을 구한다.

STEP 1 $f(x)$의 극값 구하기

조건 (가)에서 $x\longrightarrow 0$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)-3\}=0$ $\quad\therefore f(0)=3$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$

또, 조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$의 교점의 개수가 2이므로 함수 $f(x)$는 극값 -1을 갖는다.

STEP 2 $f(x)$의 계수 구하기

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f(0)=3$에서 $c=3$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f'(0)=0$에서

$b=0$

따라서 $f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2a}{3}$

이때 $f(0)=3$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{2a}{3}$에서 극값 -1을 가지므로

→ $x=0$에서 극값을 갖고 $f(0)=3$이니까 $x=-\frac{2}{3}a$에서 극값 -1을 가져야 해.

$f\left(-\frac{2a}{3}\right)=-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+3=-1$

$\frac{4}{27}a^3=-4$, $a^3=-27$

$\therefore a=-3\ (\because a$는 실수)

STEP 3 $f(4)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3$이므로

$f(4)=64-48+3=19$

04-6 답 −14

해결전략 | 접점을 미지수로 놓고, 접선의 방정식을 세운 다음 방정식이 서로 다른 세 실근을 가짐을 이용한다.

STEP 1 접선의 방정식 세우기

$f(x)=x^3+6x^2+11x-3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2+12x+11$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+6t^2+11t-3)$이라고 하면

$f'(t)=3t^2+12t+11$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+6t^2+11t-3)=(3t^2+12t+11)(x-t)$

이 직선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로

$k-(t^3+6t^2+11t-3)=-3t^3-12t^2-11t$

$\therefore\ 2t^3+6t^2+k+3=0$ ····· ㉠

STEP 2 $g(t)$의 증감표 작성하기

점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=f(x)$에 서로 다른 세 개의 접선을 그으려면 접점이 3개이어야 하므로 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(t)=2t^3+6t^2+k+3$으로 놓으면

$g'(t)=6t^2+12t=6t(t+2)$

$g'(t)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=0$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	···	-2	···	0	···
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗	$k+11$	↘	$k+3$	↗

STEP 3 $\alpha+\beta$의 값 구하기

방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$(k+11)(k+3)<0$

$\therefore\ -11<k<-3$

즉, $\alpha=-11,\ \beta=-3$이므로

$\alpha+\beta=-11+(-3)=-14$

필수유형 05 199쪽

05-1 답 풀이 참조

해결전략 I $(f(x)$의 최솟값$)>0$임을 보인다.

STEP 1 $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=x^4-4x+4$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ $(\because\ x^2+x+1>0)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	1	···
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	1	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=1$

STEP 2 부등식이 성립함을 보이기

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 부등식

$x^4-4x+4>0$이 성립한다.

05-2 답 2

해결전략 I $(f(x)$의 최솟값$)\geq 0$임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=2x^4-4x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	-1	···	0	···	1	···
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	$k-2$	↗	k	↘	$k-2$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최소이므로 최솟값은

$f(-1)=f(1)=k-2$

STEP 2 k의 최솟값 구하기

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식

$f(x)\geq 0$, 즉 $2x^4-4x^2+k\geq 0$

이 성립하려면

$k-2\geq 0$

$\therefore\ k\geq 2$

즉, k의 최솟값은 2이다.

05-3 답 $-2<k<2$

해결전략 I $(f(x)$의 최솟값$)>0$임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=x^4+4k^3x+48$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+4k^3=4(x+k)(x^2-kx+k^2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-k$ $(\because\ x^2-kx+k^2>0)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	$-k$	···
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	$-3k^4+48$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-k$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(-k)=-3k^4+48$

STEP 2 k의 값의 범위 구하기

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식

$f(x)>0$, 즉 $x^4+4k^3x+48>0$

이 성립하려면

$-3k^4+48>0,\ k^4-16<0$

$(k^2+4)(k+2)(k-2)<0$

$\therefore\ -2<k<2$ $(\because\ k^2+4>0)$

05-4 답 6

해결전략 | $f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=x^4-4x-a^2+a+9$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-a^2+a+6$	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=-a^2+a+6$

STEP 2 정수 a의 개수 구하기

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식

$f(x)\geq 0$, 즉 $x^4-4x-a^2+a+9\geq 0$

이 성립하려면

$-a^2+a+6\geq 0$, $(a+2)(a-3)\leq 0$

$\therefore -2\leq a\leq 3$

따라서 정수 a의 개수는 -2, -1, $\cdots$, 3의 6이다.

05-5 답 4

해결전략 | $f(x)$의 최솟값)>0임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3+4ax-4a-4=4(x-1)(x^2+x+a+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because a>0$이므로 $x^2+x+a+1>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	a^2-2a-3	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=a^2-2a-3$

STEP 2 자연수 a의 최솟값 구하기

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식

$f(x)>0$, 즉 $x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2>0$

이 성립하려면

$a^2-2a-3>0$, $(a+1)(a-3)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

05-6 답 $k\geq 3$

해결전략 | $f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=x^4+2(2k-3)x^2+8(2k+1)x+8k^2$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3+4(2k-3)x+16k+8$

$\quad=4(x+2)(x^2-2x+2k+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ ($\because x^2-2x+2k+1>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$8k^2-16k-24$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(-2)=8k^2-16k-24$

STEP 2 k의 값의 범위 구하기

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식

$f(x)\geq 0$, 즉 $x^4+2(2k-3)x^2+8(2k+1)x+8k^2\geq 0$

이 성립하려면

$8k^2-16k-24\geq 0$, $(k+1)(k-3)\geq 0$

$\therefore k\geq 3$ ($\because k>0$)

필수유형 06 201쪽

06-1 답 풀이 참조

해결전략 | $x\geq 0$에서 $f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.

STEP 1 $x\geq 0$에서 $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=x^3-x^2-x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\geq 0$)

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘	0	↗

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=0$

STEP 2 부등식이 성립함을 보이기

따라서 $x\geq 0$에서 $f(x)\geq 0$이므로 부등식

$x^3-x^2-x+1\geq 0$이 성립한다.

06-2 답 $k \le -2$

해결전략 | $x \ge -1$에서 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 이용한다.

STEP 1 $x \ge -1$에서 $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=x^3-3x-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x \ge -1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$2-k$	$\searrow$	$-2-k$	$\nearrow$

$x \ge -1$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=-2-k$

STEP 2 k의 값의 범위 구하기

따라서 $x \ge -1$에서 부등식 $f(x) \ge 0$, 즉 $x^3-3x-k \ge 0$이 성립하려면

$-2-k \ge 0$

$\therefore k \le -2$

06-3 답 -5

해결전략 | $1<x<3$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0임을 이용한다.

STEP 1 $1<x<3$에서 $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=x^3-3x^2-a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1<x<3$)

$1<x<3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-4-a$	$\nearrow$	

$1<x<3$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(2)=-4-a$

STEP 2 정수 a의 최댓값 구하기

따라서 $1<x<3$에서 부등식

$f(x)>0$, 즉 $x^3-3x^2-a>0$

이 성립하려면

$-4-a>0$

$\therefore a<-4$

따라서 정수 a의 최댓값은 -5이다.

06-4 답 3

해결전략 | $x \ge 0$에서 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 이용한다.

STEP 1 $x \ge 0$에서 $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=x^3-kx^2+4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2kx=x(3x-2k)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}k$

$x \ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}k$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	4	$\searrow$	$-\frac{4}{27}k^3+4$	$\nearrow$

$x \ge 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}k$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f\left(\frac{2}{3}k\right)=-\frac{4}{27}k^3+4$

STEP 2 k의 최댓값 구하기

따라서 $x \ge 0$에서 부등식 $f(x) \ge 0$, 즉 $x^3-kx^2+4 \ge 0$이 성립하려면

$-\frac{4}{27}k^3+4 \ge 0$, $k^3-27 \le 0$

$(k-3)(k^2+3k+9) \le 0$

$\therefore 0<k \le 3$ ($\because k^2+3k+9>0$, $k>0$)

따라서 양수 k의 최댓값은 3이다.

06-5 답 $k \le -2\sqrt{3}$ 또는 $k \ge 2\sqrt{3}$

해결전략 | $f'(x)>0$이고 $f(a) \ge 0$이면 $x>a$에서 $f(x)>0$이다.

STEP 1 $x>3$에서 $f'(x)>0$임을 보이기

$f(x)=x^3-12x+k^2-3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

따라서 $x>3$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

STEP 2 k의 값의 범위 구하기

$x>3$에서 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$f(3)=k^2-12 \ge 0$

$k^2 \ge 12$ $\quad \therefore k \le -2\sqrt{3}$ 또는 $k \ge 2\sqrt{3}$

참고 $f(3)=0$이고 $f'(x)>0$이면

$f(x)>f(3)=0$

즉, 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 $f(3)>0$으로 생각하지 않도록 주의한다.

06-6 답 5

해결전략 | $x\geq 0$에서 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 이용한다.

STEP 1 $x\geq 0$에서 $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=x^{n+1}-(n+1)x-n(n-6)$으로 놓으면

$f'(x)=(n+1)x^n-(n+1)=(n+1)(x^n-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\geq 0$)

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-n^2+5n$	↗

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=-n^2+5n$

STEP 2 자연수 n의 개수 구하기

따라서 $x\geq 0$에서 부등식 $f(x)\geq 0$, 즉

$x^{n+1}-(n+1)x-n(n-6)\geq 0$이 성립하려면

$-n^2+5n\geq 0$, $n(n-5)\leq 0$

$\therefore 0\leq n\leq 5$

따라서 자연수 n의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5이다.

› **참고** $x^n=1$의 실근은 n이 짝수이면 $x=\pm 1$, n이 홀수이면 $x=1$

따라서 $x\geq 0$에서 $x^n=1$, 즉 $x^n-1=0$의 실근은 $x=1$뿐이다.

필수유형 07 203쪽

07-1 답 $k>20$

해결전략 | ($f(x)-g(x)$의 최솟값)>0임을 이용한다.

STEP 1 $h(x)>0$ 꼴로 나타내기

$f(x)>g(x)$에서

$3x^4+5x^3-4>-3x^3-k$

$\therefore 3x^4+8x^3+k-4>0$

$h(x)=3x^4+8x^3+k-4$로 놓으면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)>0$이 성립해야 한다.

STEP 2 $h(x)$의 최솟값 구하기

$h'(x)=12x^3+24x^2=12x^2(x+2)$이므로

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$h(x)$	↘	$k-20$	↗		↗

함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$h(-2)=k-20$

STEP 3 k의 값의 범위 구하기

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)>0$이 성립하려면

$k-20>0$ $\therefore k>20$

07-2 답 10

해결전략 | ($g(x)-f(x)$의 최솟값)>0임을 이용한다.

STEP 1 부등식으로 나타내기

$y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으므로 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^3+2x^2-12x<x^4-3x^3+k$, 즉

$x^4-4x^3-2x^2+12x+k>0$이 성립한다.

STEP 2 $g(x)-f(x)$의 최솟값 구하기

$h(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+k$로 놓으면

$h'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$k-9$	↗	$k+7$	↘	$k-9$	↗

함수 $h(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=3$에서 최소이므로 최솟값은

$h(-1)=h(3)=k-9$

STEP 3 정수 k의 최솟값 구하기

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)>0$이 성립하려면

$k-9>0$ $\therefore k>9$

따라서 정수 k의 최솟값은 10이다.

07-3 답 20

해결전략 | 주어진 범위에서 함수 $f(x)-g(x)$의 최솟값을 구한다.

STEP 1 $h(x)\geq 0$ 꼴로 나타내기

부등식 $f(x)\geq g(x)$에서 $x^3-3x^2+a\geq -x^3+12x$

$\therefore 2x^3-3x^2-12x+a\geq 0$

$h(x)=2x^3-3x^2-12x+a$로 놓으면 $1<x<3$에서 부등식 $h(x)\geq 0$이 항상 성립해야 한다.

STEP 2 $1<x<3$에서 $h(x)$의 최솟값 구하기

$h'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$이므로

$h'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because$ $1<x<3$)

$1<x<3$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$a-20$	$\nearrow$	

$1<x<3$에서 함수 $h(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$h(2)=a-20$

STEP 3 a의 최솟값 구하기

따라서 $1<x<3$에서 부등식 $h(x)\geq 0$이 성립하려면

$a-20\geq 0$ $\quad\therefore a\geq 20$

따라서 실수 a의 최솟값은 20이다.

07-4 답 $k<-\frac{40}{27}$

해결전략 | 주어진 범위에서 $x^3-2x^2<4x-k$이어야 하므로 함수 x^3-2x^2-4x+k의 최댓값을 구한다.

STEP 1 부등식으로 나타내기

$-1\leq x\leq 1$에서 $y=x^3-2x^2$의 그래프가 직선 $y=4x-k$보다 아래쪽에 있으려면 $-1\leq x\leq 1$에서 부등식 $x^3-2x^2<4x-k$, 즉 $x^3-2x^2-4x+k<0$이 항상 성립해야 한다.

STEP 2 $f(x)$의 최댓값 구하기

$f(x)=x^3-2x^2-4x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{3}$ ($\because$ $-1\leq x\leq 1$)

$-1\leq x\leq 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$k+1$	$\nearrow$	$k+\frac{40}{27}$	$\searrow$	$k-5$

$-1\leq x\leq 1$에서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{2}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=k+\frac{40}{27}$

STEP 3 k의 값의 범위 구하기

따라서 $-1\leq x\leq 1$에서 부등식 $f(x)<0$이 성립하려면

$k+\frac{40}{27}<0$ $\quad\therefore k<-\frac{40}{27}$

07-5 답 $k>7$

해결전략 | $f(x)$의 최솟값과 $g(x)$의 최댓값을 이용한다.

STEP 1 조건 파악하기

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>g(x_2)$가 성립하려면

($f(x)$의 최솟값)$>$($g(x)$의 최댓값) $\cdots\cdots$ ㉠

이어야 한다.

STEP 2 $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=x^4-2x^2+k$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$k-1$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$k-1$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최소이므로 최솟값은

$f(-1)=f(1)=k-1$

STEP 3 $g(x)$의 최댓값 구하기

$g(x)=-6x^2+12x=-6(x-1)^2+6$이므로 $g(x)$의 최댓값은 6이다.

STEP 4 k의 값의 범위 구하기

따라서 ㉠에서 $k-1>6$이어야 하므로

$k>7$

풍쌤의 비법

임의의 두 실수 x_1, x_2와 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $f(x_1)>g(x_1)$

➡ ($f(x)-g(x)$의 최솟값)>0

② $f(x_1)>g(x_2)$

➡ ($f(x)$의 최솟값)$>$($g(x)$의 최댓값)

07-6 답 34

해결전략 | 두 부등식 $f(x)-12x\leq k$, $g(x)-12x\geq k$가 항상 성립하기 위한 k의 값의 범위를 구한다.

STEP 1 부등식 변형하기

$f(x)\leq 12x+k\leq g(x)$에서

$f(x)-12x\leq k\leq g(x)-12x$

STEP 2 $f(x)-12x\leq k$가 항상 성립하도록 하는 k의 값의 범위 구하기

$F(x)=f(x)-12x$로 놓으면

$F(x)=-x^4-2x^3-x^2-12x$

$\therefore F'(x)=-4x^3-6x^2-2x-12$

$=-2(x+2)(2x^2-x+3)$

$F'(x)=0$에서 $x=-2$ ($\because 2x^2-x+3>0$)

함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$
$F(x)$	↗	20	↘

함수 $F(x)$는 $x=-2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$F(-2)=20$

따라서 부등식 $F(x)\le k$가 항상 성립하려면

$k\ge 20$

STEP 3 $g(x)-12x\ge k$가 항상 성립하도록 하는 k의 값의 범위 구하기

$G(x)=g(x)-12x$로 놓으면

$G(x)=3x^2-12x+a$

$=3(x-2)^2+a-12$

따라서 함수 $G(x)$의 최솟값이 $a-12$이므로 부등식 $G(x)\ge k$가 항상 성립하려면

$k\le a-12$

STEP 4 a의 값 구하기

즉, $20\le k\le a-12$를 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이므로

$22\le a-12<23$

$\therefore 34\le a<35$

따라서 자연수 a의 값은 34이다.

필수유형 08 205쪽

08-1 답 (1) 속도: -7, 가속도: 4 (2) 2

해결전략 | 위치를 미분하면 속도, 속도를 미분하면 가속도이고, 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$임을 이용한다.

(1) **STEP 1** 시각 t에서의 속도, 가속도 구하기

점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-2t-8$

$a=\frac{dv}{dt}=6t-2$

STEP 2 $t=1$에서의 점 P의 속도, 가속도 구하기

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=-7$, $a=4$

(2) 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$3t^2-2t-8=0$, $(3t+4)(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

08-2 답 속도: -2, 가속도: 2

해결전략 | 위치를 미분하면 속도, 속도를 미분하면 가속도이고, 원점을 지날 때 $x=0$임을 이용한다.

STEP 1 시각 t에서의 속도, 가속도 구하기

점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-10t+6$

$a=\frac{dv}{dt}=6t-10$

STEP 2 원점을 지나는 시각 구하기

점 P가 원점을 지날 때 $x=0$이므로

$t^3-5t^2+6t=0$, $t(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=3$ ($\because t>0$)

STEP 3 원점을 처음으로 다시 지나는 순간의 속도, 가속도 구하기

따라서 $t=2$일 때 점 P가 처음으로 다시 원점을 지나므로 이때의 속도와 가속도는

$v=-2$, $a=2$

08-3 답 3

해결전략 | 주어진 조건을 이용하여 a, b에 대한 방정식을 세운다.

STEP 1 시각 t에서의 속도, 가속도 구하기

점 P의 시각 t에서의 속도는

$\frac{dx}{dt}=3t^2+2at+b$

점 P의 시각 t에서의 가속도는

$\frac{dv}{dt}=6t+2a$

STEP 2 $a+b$의 값 구하기

$t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸면 속도가 0이므로

$3+2a+b=0$ $\therefore 2a+b=-3$ …… ㉠

$t=2$에서 점 P의 가속도가 0이므로

$12+2a=0$ $\therefore a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면

$-12+b=-3$ $\therefore b=9$

$\therefore a+b=-6+9=3$

08-4 답 ㄱ, ㄷ

해결전략 | 위치를 미분하면 속도, 속도를 미분하면 가속도이고, 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$임을 이용한다.

STEP 1 시각 t에서의 속도, 가속도 구하기

점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=t^2-10t+9$

$a=\frac{dv}{dt}=2t-10$

STEP 2 보기의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $t=2$일 때, $v=-7$

$t=8$일 때, $v=-7$

따라서 점 P의 속도는 같다. (참)

ㄴ. $t=4$일 때, $a=-2$

따라서 점 P의 가속도는 음수이다. (거짓)

ㄷ. 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$t^2-10t+9=0$, $(t-1)(t-9)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=9$

따라서 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08-5 답 $\frac{3}{4}<t<2$

해결전략 | 서로 반대 방향으로 움직일 때, 속도의 부호가 서로 다름을 이용한다.

STEP 1 시각 t에서의 속도 구하기

점 P의 속도를 $v_P(t)$, 점 Q의 속도를 $v_Q(t)$라고 하면

$v_P(t)=x_P'(t)=-4t+3$

$v_Q(t)=x_Q'(t)=-2t+4$

STEP 2 서로 반대 방향으로 움직일 때의 t의 값의 범위 구하기

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면

$v_P(t)v_Q(t)<0$이므로

$(-4t+3)(-2t+4)<0$, $(4t-3)(t-2)<0$

$\therefore \frac{3}{4}<t<2$

08-6 답 $\frac{1}{2}$

해결전략 | 위치를 미분하면 속도, 속도를 미분하면 가속도임을 이용한다.

STEP 1 시각 t에서의 속도, 가속도 구하기

점 P의 속도를 $v_P(t)$, 가속도를 $a_P(t)$라고 하면

$v_P(t)=x_P'(t)=2t^2-2t-4$

$a_P(t)=v_P'(t)=4t-2$

점 Q의 속도를 $v_Q(t)$, 가속도를 $a_Q(t)$라고 하면

$v_Q(t)=x_Q'(t)=4t$

$a_Q(t)=v_Q'(t)=4$

STEP 2 가속도가 같아지는 시각 구하기

두 점 P, Q의 가속도가 같으려면

$4t-2=4 \quad \therefore t=\frac{3}{2}$

STEP 3 가속도가 같을 때의 두 점 P, Q 사이의 거리 구하기

$t=\frac{3}{2}$일 때, 두 점 P, Q의 위치는

$x_P\left(\frac{3}{2}\right)=-6$, $x_Q\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{11}{2}$

따라서 $t=\frac{3}{2}$일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리는

$-\frac{11}{2}-(-6)=\frac{1}{2}$

필수유형 09

207쪽

09-1 답 (1) 시각: $\frac{5}{2}$초, 높이: $\frac{125}{4}$ m (2) -25 m/s

해결전략 | 최고 높이에 도달하면 $v=0$이고 지면에 떨어지면 $x=0$이다.

(1) STEP 1 시각 t에서의 속도 구하기

물 로켓의 속도를 v m/s라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=25-10t$

STEP 2 최고 높이에 도달할 때의 시각과 높이 구하기

물 로켓이 최고 높이에 도달하면 $v=0$이므로

$25-10t=0$에서 $t=\frac{5}{2}$

$t=\frac{5}{2}$일 때, $x=\frac{125}{4}$

따라서 물 로켓은 $\frac{5}{2}$초 후에 최고 높이에 도달하고,

그때의 높이는 $\frac{125}{4}$ m이다.

(2) STEP 1 지면에 떨어지는 시각 구하기

지면에 떨어질 때 $x=0$이므로

$25t-5t^2=0$, $t(t-5)=0$

$\therefore t=5$ ($\because t>0$)

STEP 2 지면에 떨어지는 순간의 속도 구하기

$t=5$일 때, $v=-25$

따라서 물 로켓이 지면에 떨어지는 순간의 속도는

-25 m/s이다.

09-2 답 시각: 4초, 높이: 32 m

해결전략 | 최고 높이에 도달하면 $v=0$이다.

STEP 1 시각 t에서의 속도 구하기

감자의 속도를 v m/s라고 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=16-4t$$

STEP 2 최고 높이에 도달할 때의 시각과 높이 구하기

감자가 최고 높이에 도달하면 $v=0$이므로

$16-4t=0$에서 $t=4$

$t=4$일 때, $h=32$

따라서 감자는 4초 후에 최고 높이에 도달하고, 그때의 높이는 32 m이다.

09-3 답 $-10\sqrt{5}$ m/s

해결전략 | 지면에 떨어지면 $h=0$이다.

STEP 1 시각 t에서의 속도 구하기

물체의 속도를 v m/s라고 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=-10t$$

STEP 2 지면에 떨어질 때의 시각 구하기

지면에 떨어질 때 $h=0$이므로

$-5t^2+25=0$에서 $t^2=5$

$\therefore t=\sqrt{5}\ (\because t>0)$

STEP 3 지면에 떨어지는 순간의 속도 구하기

$t=\sqrt{5}$일 때, $v=-10\sqrt{5}$

따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도는 $-10\sqrt{5}$ m/s이다.

09-4 답 $\frac{25}{2}$ m

해결전략 | 자동차가 정지할 때 $v=0$임을 이용한다.

STEP 1 자동차의 속도 구하기

자동차의 속도를 v m/s라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=10-4t$$

STEP 2 정지할 때의 시각 구하기

자동차가 정지할 때 $v=0$이므로

$10-4t=0 \quad \therefore t=\frac{5}{2}$

STEP 3 정지할 때까지 움직인 거리 구하기

$t=\frac{5}{2}$일 때, $x=\frac{25}{2}$

따라서 자동차가 정지할 때까지 움직인 거리는 $\frac{25}{2}$ m이다.

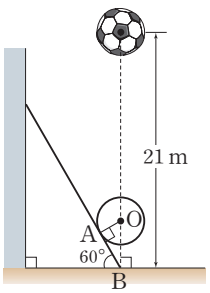
09-5 답 -20 m/s

해결전략 | 공이 경사면과 처음으로 충돌할 때, 지면으로부터의 높이를 이용하여 충돌하는 시각을 구한다.

STEP 1 경사면과 처음으로 충돌할 때의 시각 구하기

오른쪽 그림과 같이 공이 경사면과 처음으로 충돌할 때,

$$\overline{OB}=\frac{\overline{OA}}{\sin 30^\circ}=\frac{0.5}{\frac{1}{2}}=1\ (\text{m})$$



$h=1$일 때,

$21-5t^2=1$, $t^2=4$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 $t=2$일 때, 공이 처음으로 경사면과 충돌한다.

STEP 2 충돌하는 순간의 속도 구하기

한편, 공의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면

$v(t)=h'(t)=-10t$

$\therefore v(2)=-20$

따라서 공이 경사면과 충돌하는 순간의 속도는 -20 m/s이다.

필수유형 10 209쪽

10-1 답 ㄱ, ㄴ

해결전략 | 속도의 그래프에서 점 P의 운동 방향, 가속도, 속력을 파악한다.

ㄱ. $t=b$, $t=d$에서 $v=0$이므로 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)

ㄴ. $a<t<b$에서 접선의 기울기가 양수이므로 가속도는 양수이다. (참)

ㄷ. 주어진 그래프에서 $|v(a)|>|v(c)|$이므로 $t=a$에서 속력이 최대이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

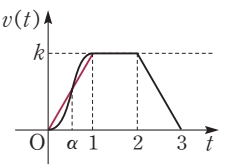
10-2 답 ②

해결전략 | 속도의 그래프에서 가속도는 접선의 기울기와 같음을 이용한다.

STEP 1 구간을 나누어 가속도 구하기

(i) $0<t<1$일 때

오른쪽 그림과 같이 두 점 $(0, 0)$, $(1, k)$를 잇는 직선과 그래프가 만나는 점의 t좌표를 α라고 하면



$0<t<\alpha$에서 접선의 기울기가 증가하고 $\alpha<t<1$에서 접선의 기울기가 감소한다.

따라서 $t=\alpha$에서 접선의 기울기가 최대이고

$a(\alpha)=v'(\alpha)>k$

(ii) $1<t<2$일 때

속도가 일정하므로

$a(t)=0$

(iii) $2<t<3$일 때

접선의 기울기가 $-k$이므로 $a(t)=-k$

STEP 2 가속도의 그래프의 개형 찾기

(i)~(iii)에 의하여 $a(t)$의 그래프의 개형으로 가장 알맞은 것은 ②이다.

10-3 ㄱ

해결전략 | 위치의 그래프에서 속도는 접선의 기울기와 같음을 이용한다.

ㄱ. $x(t)$의 그래프는 $t=b$에서 원점을 지나므로 $0<t<d$에서 점 P는 원점을 한 번 지난다. (참)

ㄴ. $t=c$에서 접선의 기울기가 0이고 $t=c$의 좌우에서 접선의 기울기가 음수$(-)$에서 양수$(+)$로 바뀌므로 점 P는 $t=c$에서 운동 방향을 바꾼다. (거짓)

ㄷ. $0<t<a$에서 속도가 양수이고, $t=a$에서 속도가 0이므로 $t=a$에서 속도가 최대인 것은 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

10-4 ㄷ

해결전략 | 위치의 그래프에서 속도는 접선의 기울기와 같음을 이용한다.

ㄱ. 점 P는 $t=b$에서 처음으로 원점을 지나고, $t=b$에서 접선의 기울기가 음수이므로 속도는 음수이다. (거짓)

ㄴ. 점 P는 $t=a$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸고, $t=a$의 좌우에서 속도가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 가속도는 음수이다. (거짓)

ㄷ. 점 P는 $t=e$에서 마지막으로 운동 방향을 바꾸고, $x(e)>0$이므로 점 P의 위치는 양수이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

필수유형 11

211쪽

11-1 (1) 0.9 m/s (2) 1.6 m/s

해결전략 | 삼각형의 닮음을 이용하여 그림자의 길이를 구한다.

(1) **STEP 1** 그림자의 길이를 t로 나타내기

t초 후 가로등 바로 밑에서 학생까지의 거리는 $0.7t$ m이므로 그림자의 길이를 l m라고 하면

$(l+0.7t):3.2=l:1.8$

$3.2l=1.8l+1.26t$

$1.4l=1.26t$

$\therefore\ l=0.9t$

STEP 2 그림자의 길이의 변화율 구하기

따라서 그림자의 길이 l의 변화율은

$\dfrac{dl}{dt}=0.9\ (\mathrm{m/s})$

(2) **STEP 1** 그림자의 끝까지의 거리를 t로 나타내기

t초 후 가로등 바로 밑에서 그림자의 앞 끝까지의 거리를 $f(t)$ m라고 하면

$f(t)=0.9t+0.7t=1.6t$

STEP 2 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도 구하기

따라서 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도는

$\dfrac{d}{dt}f(t)=1.6\ (\mathrm{m/s})$

11-2 6.4π cm²/s

해결전략 | t초 후 원의 넓이를 t에 대한 식으로 나타낸 다음 미분하여 넓이의 변화율을 구한다.

STEP 1 원의 넓이를 t로 나타내기

t초 후 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이는 $0.8t$ cm이므로 이 원의 넓이를 $S(t)$ cm²라고 하면

$S(t)=\pi\times(0.8t)^2=0.64t^2\pi$

STEP 2 $t=5$일 때 원의 넓이의 변화율 구하기

원의 넓이의 변화율은 $S'(t)=1.28t\pi$이므로

$S'(5)=6.4\pi$

따라서 5초 후의 가장 바깥쪽의 원의 넓이의 변화율은 6.4π cm²/s이다.

11-3 27π

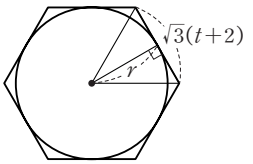
해결전략 | 정육각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 t에 대한 식으로 나타내어 내접하는 원의 넓이를 구한다.

STEP 1 원의 반지름의 길이를 t로 나타내기

t초 후의 정육각형의 한 변의 길이는

$2\sqrt{3}+\sqrt{3}t=\sqrt{3}(t+2)$

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{3}(t+2)$인 정육각형에 내접하는 원의 반지름의 길이 r는 한 변의 길이가 $\sqrt{3}(t+2)$인 정삼각형의 높이와 같으므로



$$r=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\{\sqrt{3}(t+2)\}=\frac{3}{2}(t+2)=\frac{3}{2}t+3$$

STEP 2 원의 넓이의 변화율 구하기

t초 후의 원의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$$S(t)=\pi\times\left(\frac{3}{2}t+3\right)^2=\left(\frac{9}{4}t^2+9t+9\right)\pi$$

$$\therefore S'(t)=\left(\frac{9}{2}t+9\right)\pi$$

STEP 3 $t=4$일 때 원의 넓이의 변화율 구하기

따라서 $t=4$일 때 원의 넓이의 변화율은

$$S'(4)=\left(\frac{9}{2}\times4+9\right)\pi=27\pi$$

11-4 답 36

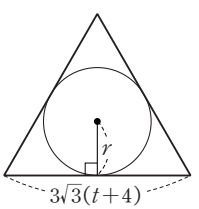
해결전략 | 정삼각형의 한 변의 길이를 t에 대한 식으로 나타내어 내접하는 원의 넓이를 구한다.

STEP 1 원의 반지름의 길이를 t로 나타내기

t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는

$12\sqrt{3}+3\sqrt{3}t=3\sqrt{3}(t+4)$

정삼각형에 내접하는 원의 중심은 정삼각형의 무게중심과 같으므로 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $3\sqrt{3}(t+4)$인 정삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면



$$r=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times3\sqrt{3}(t+4)$$

$$=\frac{3}{2}(t+4)$$

STEP 2 원의 넓이의 변화율 구하기

t초 후의 원의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$$S(t)=\pi\times\left\{\frac{3}{2}(t+4)\right\}^2=\frac{9\pi}{4}(t+4)^2$$

$$\therefore S'(t)=\frac{9\pi}{2}(t+4)$$

STEP 3 a의 값 구하기

한편, 정삼각형의 한 변의 길이가 $24\sqrt{3}$이면

$3\sqrt{3}(t+4)=24\sqrt{3}$에서 $t=4$

따라서 $t=4$일 때 원의 넓이의 변화율은

$$S'(4)=\frac{9\pi}{2}\times8=36\pi$$

$$\therefore a=36$$

11-5 답 6

해결전략 | t초 후의 삼각형의 넓이를 t에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 삼각형 PBQ의 넓이를 t로 나타내기

t초 후의 $\overline{AP}$의 길이는 $2t$이므로

$\overline{PB}=12-2t$

t초 후의 $\overline{BQ}$의 길이는 $3t$이므로 삼각형 PBQ의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times(12-2t)\times3t=-3t^2+18t$$

STEP 2 넓이가 처음으로 24가 되는 시각 구하기

$S(t)=24$에서 $-3t^2+18t=24$

$t^2-6t+8=0$, $(t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

따라서 $t=2$일 때 삼각형 PBQ의 넓이가 처음으로 24가 된다.

STEP 3 넓이가 24일 때 넓이의 변화율 구하기

이때 $S'(t)=-6t+18$이므로 $t=2$일 때 삼각형의 넓이의 변화율은

$S'(2)=6$

11-6 답 $\frac{27}{2}\pi$ cm³/s

해결전략 | 그릇과 담겨 있는 물이 서로 닮음임을 이용하여 물의 부피를 t에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 물의 높이와 수면의 반지름의 길이를 t에 대한 식으로 나타내기

물의 높이를 h cm라고 하면

$$h=1.5t=\frac{3}{2}t$$

수면의 반지름의 길이를 r cm라고 하면

$10:5=h:r$ $\quad\therefore r=\frac{1}{2}h=\frac{3}{4}t$

STEP 2 물의 부피의 변화율 구하기

물의 부피를 $V(t)$ cm³라고 하면

$$V(t)=\frac{1}{3}\times\pi r^2\times h$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{9}{16}t^2\pi\times\frac{3}{2}t=\frac{9}{32}t^3\pi$$

$$\therefore V'(t)=\frac{27}{32}t^2\pi$$

STEP 3 높이가 6 cm일 때 물의 부피의 변화율 구하기

한편, $h=6$에서 $\frac{3}{2}t=6$ $\quad\therefore t=4$

$\therefore V'(4)=\frac{27}{32}\times 4^2\pi=\frac{27}{2}\pi$

즉, 물의 높이가 6 cm일 때 부피의 변화율은

$\frac{27}{2}\pi$ cm^3/s이다.

실전 연습 문제 212~214쪽

01 ③	**02** 11	**03** ③	**04** ②	**05** ⑤
06 ①	**07** ④	**08** ⑤	**09** 5	**10** ④
11 ⑤	**12** $k\le -5$	**13** 3	**14** 22	**15** ①
16 27	**17** ③			

01

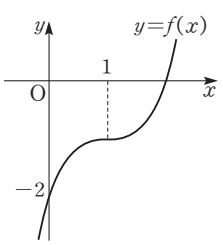
해결전략 | 함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$f(x)=x^3-3x^2+3x-2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\ge 0$

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점에서 만난다.



$\therefore a=1$

STEP 2 $a+b$의 값 구하기

$g(x)=x^4-4x^2+3$으로 놓으면

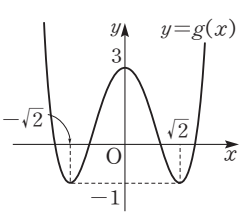
$g'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$g'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	$-\sqrt{2}$	⋯	0	⋯	$\sqrt{2}$	⋯
$g'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↘	−1	↗	3	↘	−1	↗

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 네 점에서 만나므로



$b=4$

$\therefore a+b=1+4=5$

02

해결전략 | 방정식을 $f(x)=a$ 꼴로 변형하여 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

STEP 1 $y=-3x^3+9x^2$의 그래프 그리기

$3x^3-9x^2+a=0$에서 $-3x^3+9x^2=a$

$f(x)=-3x^3+9x^2$으로 놓으면

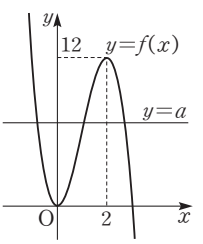
$f'(x)=-9x^2+18x=-9x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	0	⋯	2	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	0	↗	12	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ····· ❶



STEP 2 정수 a의 개수 구하기

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$0<a<12$ ····· ❷

따라서 정수 a의 개수는 1, 2, ⋯, 11의 11이다. ····· ❸

채점 요소	배점
❶ $y=-3x^3+9x^2$의 그래프 그리기	40 %
❷ a의 값의 범위 구하기	50 %
❸ 정수 a의 개수 구하기	10 %

◉→ 다른 풀이

$g(x)=3x^3-9x^2+a$로 놓으면

$g'(x)=9x^2-18x=9x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$g(0)g(2)<0$

$a(a-12)<0$

$\therefore 0<a<12$

따라서 정수 a의 개수는 1, 2, ⋯, 11의 11이다.

03

해결전략 | $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

STEP 1 증감표 작성하기

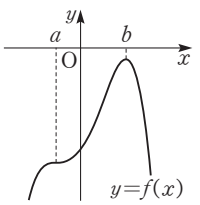
$y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(a)=0$, $f'(b)=0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘

STEP 2 조건을 만족시키는 $f(b)$의 값의 범위 구하기

이때 방정식 $f(x)=0$이 실근을 갖지 않으려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않아야 하므로 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$\therefore f(b)<0$



참고 ④ $f(a)f(b)>0$은 $f(x)=0$이 실근을 갖지 않도록 하는 필요조건이다.

04

해결전략 | $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(x)<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것임을 이용한다.

STEP 1 $y=|f(x)|$의 그래프 그리기

$f(x)=x^3-3x^2-9x+10$에서

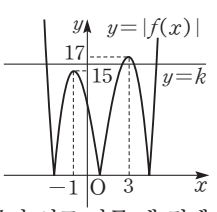
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	15	↘	-17	↗

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 $\beta-\alpha$의 값 구하기

방정식 $|f(x)|=k$가 서로 다른 네 실근을 가지려면 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$15<k<17$

따라서 $\alpha=15$, $\beta=17$이므로

$\beta-\alpha=17-15=2$

05

해결전략 | $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $h(x)$의 증감표를 작성한다.

STEP 1 $h(x)$의 증감표 작성하기

$h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=b$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

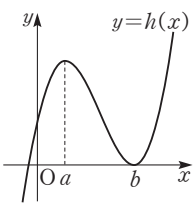
x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

STEP 2 보기의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $h'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $h'(x)$의 값이 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. $h(b)=0$이면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 두 점에서 만난다.

따라서 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)



ㄷ. 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 열린구간 (α, β)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)$

를 만족시키는 γ가 열린구간 (α, β)에 존재한다.

열린구간 $(0, b)$에서

$h'(x)<h'(0)=5$

$\therefore h'(\gamma)<5$

따라서 $\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)<5$이므로

$h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

06

해결전략 | 주어진 방정식을 $h(x)=a$ 꼴로 변형한 후 $y=h(x)$의 그래프를 이용한다.

STEP 1 $y=h(x)$의 그래프 그리기

$f(x)=g(x)$에서

$3x^3-x^2-3x=x^3-4x^2+9x+a$

$\therefore 2x^3+3x^2-12x=a$

$h(x)=2x^3+3x^2-12x$로 놓으면

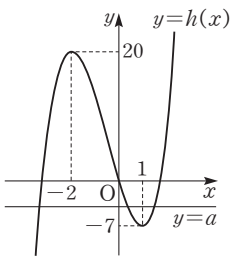
$h'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	20	↘	-7	↗

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 정수 a의 개수 구하기

방정식 $h(x)=a$가 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가지려면

$-7<a<0$

따라서 정수 a의 개수는 $-6, -5, \cdots, -1$의 6이다.

07

해결전략 | 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형한 후 $y=f(x)$의 그래프를 이용한다.

STEP 1 $y=f(x)$의 그래프 그리기

$3x^4-12x+k-3=0$에서 $-3x^4+12x+3=k$

$f(x)=-3x^4+12x+3$으로 놓으면

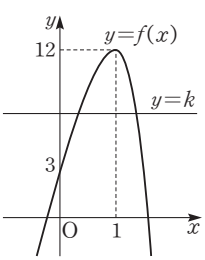
$f'(x)=-12x^3+12=-12(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	12	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 모든 정수 k의 값의 합 구하기

주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가지려면

$3<k<12$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$4+5+\cdots+11=60$

08

해결전략 | 주어진 방정식을 $f(x)=a$ 꼴로 변형한 후 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표를 이용한다.

STEP 1 $y=f(x)$의 그래프 그리기

$2x^3+3x^2-12x+a=0$에서 $-2x^3-3x^2+12x=a$

$f(x)=-2x^3-3x^2+12x$로 놓으면

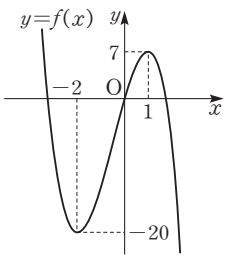
$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-20	↗	7	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 옳은 것 찾기

① $a=7$이면 주어진 방정식은 한 개의 양의 실근(중근)과 한 개의 음의 실근을 갖는다.

② $a=-20$이면 주어진 방정식은 한 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근(중근)을 갖는다.

③ $-7<a<0$이면 주어진 방정식은 한 개의 양의 실근과 두 개의 음의 실근을 갖는다.

④ 주어진 방정식은 $0<a<7$이면 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖고, $a=7$이면 한 개의 양의 실근(중근)과 한 개의 음의 실근을 갖는다.

또, $7<a<20$이면 한 개의 음의 실근을 갖는다.

09

해결전략 | 접점의 좌표를 미지수로 놓고, 접선의 방정식을 세운 다음 방정식이 서로 다른 두 실근을 가짐을 이용한다.

STEP 1 접선의 방정식 세우기

$f(x)=x^3+5$로 놓으면

$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3+5)라고 하면 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+5)=3t^2(x-t)$

이 직선이 점 $(1, a)$를 지나므로

$a-t^3-5=3t^2-3t^3$

$\therefore 2t^3-3t^2+a-5=0$ ····· ㉠

····· ❶

STEP 2 $g(t)$의 증감표 작성하기

점 $(1, a)$에서 서로 다른 두 개의 접선을 그으려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$g(t)=2t^3-3t^2+a-5$로 놓으면

$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗	$a-5$	↘	$a-6$	↗

…… ❷

STEP 3 a의 값 구하기

방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$(a-5)(a-6)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a\neq 6$) …… ❸

채점 요소	배점
❶ 접선의 방정식과 지나는 점 이용하여 식 세우기	30 %
❷ $g(t)$의 증감표 작성하기	40 %
❸ a의 값 구하기	30 %

10

해결전략 | $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

STEP 1 증감표 작성하기

$f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1$에서

$f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

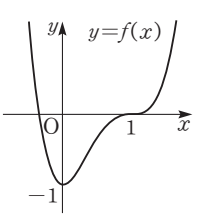
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	+
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↗

STEP 2 보기의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $f'(1)=0$이지만 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 x축과 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)



ㄷ. $f(x)$는 $x=0$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)$의 최솟값은

$f(0)=-1$

즉, 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq -1$이 성립한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11

해결전략 | 부등식의 좌변의 최솟값이 0 이상임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=3x^4-8x^3+36x+a$로 놓으면

$f'(x)=12x^3-24x^2+36=12(x+1)(x^2-3x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because x^2-3x+3>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	$a-25$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(-1)=a-25$

STEP 2 a의 최솟값 구하기

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$, 즉

$3x^4-8x^3+36x+a\geq 0$이 성립하려면

$a-25\geq 0$ $\therefore a\geq 25$

따라서 a의 최솟값은 25이다.

12

해결전략 | $x\geq 0$에서 부등식의 좌변의 최솟값이 k 이상이어야 함을 이용한다.

STEP 1 $x\geq 0$에서 $f(x)$의 최솟값 구하기

$f(x)=4x^3-3x^2-6x$로 놓으면

$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\geq 0$)

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$	0	↘	-5	↗

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=-5$ …… ❶

STEP 2 k의 값의 범위 구하기

따라서 $x\geq 0$에서 부등식 $f(x)\geq k$, 즉

$4x^3-3x^2-6x\geq k$가 성립하려면

$k\leq -5$ …… ❷

채점 요소	배점
❶ $x\geq 0$에서 좌변의 최솟값 구하기	70 %
❷ k의 값의 범위 구하기	30 %

13

해결전략 | 주어진 부등식을 $h(x) \geq 0$ 꼴로 변형한 후 주어진 구간에서 $h(x)$의 최솟값을 구한다.

STEP 1 주어진 부등식을 $h(x) \geq 0$ 꼴로 변형하기

$f(x) \geq 3g(x)$에서 $f(x) - 3g(x) \geq 0$

$x^3 + 3x^2 - k - 3(2x^2 + 3x - 10) \geq 0$

$\therefore x^3 - 3x^2 - 9x + 30 - k \geq 0$

STEP 2 $h(x)$의 최솟값 구하기

$h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 30 - k$로 놓으면

$h'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

$h'(x) = 0$에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$

$-1 \leq x \leq 4$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$35-k$	$\searrow$	$3-k$	$\nearrow$	$10-k$

$-1 \leq x \leq 4$에서 함수 $h(x)$는 $x = 3$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$h(3) = 3 - k$

STEP 3 k의 최댓값 구하기

따라서 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 부등식 $h(x) \geq 0$, 즉 $f(x) \geq 3g(x)$가 성립하려면

$3 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq 3$

따라서 k의 최댓값은 3이다.

14

해결전략 | 위치에 대한 함수를 미분하여 속도, 속도에 대한 함수를 미분하여 가속도에 대한 함수를 구한다.

STEP 1 시각 t에서의 속도, 가속도 구하기

점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -t^2 + 6t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -2t + 6$$

STEP 2 k의 값 구하기

점 P의 가속도가 0이면 $-2t + 6 = 0$에서

$t = 3$

따라서 $t = 3$일 때 점 P의 위치가 40이므로

$-\frac{1}{3} \times 3^3 + 3 \times 3^2 + k = 40$, $18 + k = 40$

$\therefore k = 22$

15

해결전략 | 위치에 대한 함수를 미분하여 속도, 속도에 대한 함수를 미분하여 가속도에 대한 함수를 구한다.

STEP 1 시각 t에서의 속도, 가속도 구하기

점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 30$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 18$$

STEP 2 속도가 6이 되는 시각 구하기

속도가 6이면 $v = 6$이므로

$3t^2 - 18t + 30 = 6$에서

$t^2 - 6t + 8 = 0$, $(t-2)(t-4) = 0$

$\therefore t = 2$ 또는 $t = 4$

STEP 3 속도가 처음으로 6이 되는 순간의 가속도 구하기

따라서 $t = 2$에서 속도가 처음으로 6이 되므로 이때의 가속도는

$a = 12 - 18 = -6$

16

해결전략 | 두 점 P, Q의 위치에 대한 함수를 각각 미분하여 속도에 대한 함수를 구한다.

STEP 1 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도 구하기

점 P의 속도를 v_1, 점 Q의 속도를 v_2라고 하면

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 3t^2 - 4t + 3$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 2t + 12$$

STEP 2 속도가 같아지는 시각 구하기

두 점 P, Q의 속도가 같으려면 $v_1 = v_2$이므로

$3t^2 - 4t + 3 = 2t + 12$에서

$3t^2 - 6t - 9 = 0$, $(t+1)(t-3) = 0$

$\therefore t = 3$ $(\because t > 0)$

따라서 $t = 3$에서 두 점 P, Q의 속도가 같아진다.

STEP 3 두 점 P, Q 사이의 거리 구하기

$t = 3$일 때, 점 P의 위치는 $x_1 = 18$

점 Q의 위치는 $x_2 = 45$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$45 - 18 = 27$

17

해결전략 | 삼각형의 닮음을 이용하여 수면의 반지름의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 음료수의 높이와 수면의 반지름의 길이를 t에 대한 식으로 나타내기

음료수의 높이를 h cm라고 하면

$h=2t$

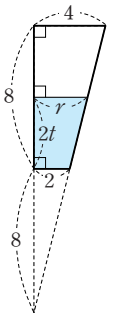
수면의 반지름의 길이를 r cm라고 하면

오른쪽 그림에서

$8:2=(8+2t):r$

$8r=16+4t$

$\therefore r=\frac{1}{2}t+2$



STEP 2 수면의 넓이의 변화율 구하기

따라서 수면의 넓이를 $S(t)$ cm^{2}라고 하면

$S(t)=\pi r^2=\pi\times\left(\frac{1}{2}t+2\right)^2$

$\therefore S'(t)=2\pi\times\left(\frac{1}{2}t+2\right)\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}t+2\right)\pi$

STEP 3 높이가 4 cm일 때 수면의 넓이의 변화율 구하기

한편, 수면의 높이가 4 cm이려면 $t=2$이어야 하므로

$S'(2)=3\pi$

따라서 구하는 넓이의 변화율은 3π cm^2/s이다.

상위권 도약 문제 215~216쪽

01 ⑤ **02** $\frac{1}{3}$ **03** ⑤ **04** -1

05 $0<a<8$ **06** ① **07** ③

01

해결전략 | $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

STEP 1 $f(x)$의 극값 구하기

$y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(0)=0$, $f'(2)=0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

STEP 2 보기의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. $f(0)<0$이면 $f(2)<f(0)<0$

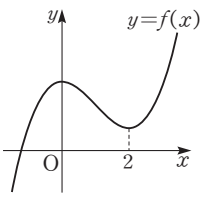
$\therefore |f(0)|<|f(2)|$ (참)

ㄴ. $f(0)>f(2)$이므로 $f(0)f(2)\geq 0$이면

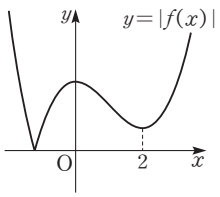
$f(0)>f(2)\geq 0$ 또는 $f(2)<f(0)\leq 0$

(i) $f(0)>f(2)\geq 0$일 때

$y=f(x)$의 그래프가 [그림 1]과 같으므로 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



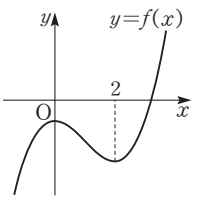
[그림 1]



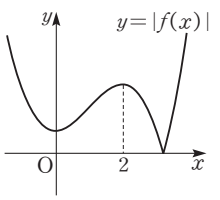
[그림 2]

(ii) $f(2)<f(0)\leq 0$일 때

$y=f(x)$의 그래프가 [그림 3]과 같으므로 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 4]와 같다.



[그림 3]



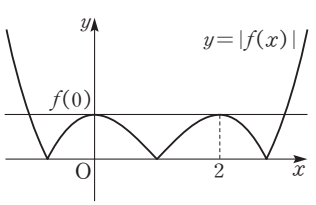
[그림 4]

(i), (ii)에 의하여 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면

$f(0)=-f(2)$ $\therefore |f(0)|=|f(2)|$

따라서 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 직선 $y=f(0)$과의 교점의 개수가 4이다.



즉, 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

참고 ㄴ. $a\neq 2$일 때, 함수 $|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하지 않지만, 극솟값을 갖는다.

02

해결전략 | 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 인수를 구한다.

STEP 1 조건을 만족시키는 $f(x)$ 구하기

조건 (가)에서 $f(-1)=0$이므로 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

또, 조건 (나)에서 -1이 아닌 상수 a에 대하여 $f(a)=0$이라고 하면 $3\le a\le 5$이고 조건 (가)에서 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하므로 $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.

$\therefore f(x)=(x+1)(x-a)^2\ (3\le a\le 5)$

STEP 2 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 값을 a에 대한 식으로 나타내기

따라서

$f'(x)=(x-a)^2+2(x+1)(x-a)$

$\quad=(x-a)(3x+2-a)$

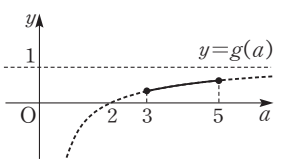
이므로

$f(0)=a^2,\ f'(0)=-a(2-a)$

$\therefore \dfrac{f'(0)}{f(0)}=\dfrac{-a(2-a)}{a^2}=\dfrac{a-2}{a}=1-\dfrac{2}{a}$

STEP 3 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최솟값 구하기

$g(a)=1-\dfrac{2}{a}$로 놓으면 $3\le a\le 5$에서 함수 $y=g(a)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $g(a)$는 $a=3$에서 최소이므로 $g(a)$의 최솟값은

$g(3)=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

즉, $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최솟값은 $\dfrac{1}{3}$이다.

03

해결전략 | 함수 $f(t)$가 불연속인 점에서 $f(t)g(t)$가 연속이어야 함을 이용한다.

STEP 1 $f(t)$ 구하기

$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0$에서

$x=1$ 또는 $x^2(x-3)=t$

$h(x)=x^2(x-3)=x^3-3x^2$으로 놓으면

$h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

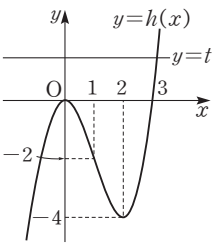
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	0	↘	−4	↗

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

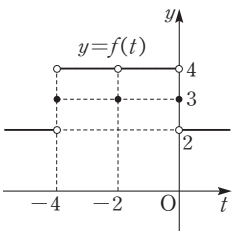
$t>0$이면 교점이 1개,

$t=0$ 또는 $t=-4$이면 교점이 2개, $-4<t<0$이면 교점이 3개이다.



특히, $h(1)=-2$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.

$$f(t)=\begin{cases}2 & (t>0)\\ 3 & (t=0)\\ 4 & (-2<t<0)\\ 3 & (t=-2)\\ 4 & (-4<t<-2)\\ 3 & (t=-4)\\ 2 & (t<-4)\end{cases}$$



STEP 2 $f(t)g(t)$가 연속일 조건 구하기

따라서 함수 $f(t)$는 $t=-4$, $t=-2$, $t=0$에서 불연속이므로 함수 $f(t)g(t)$가 $t=-4$, $t=-2$, $t=0$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$t=-4$에서 연속이려면

$f(-4)g(-4)=\lim\limits_{t\to -4+} f(t)g(t)=\lim\limits_{t\to -4-} f(t)g(t)$

이어야 하므로

$3g(-4)=4g(-4)=2g(-4)$

$\therefore g(-4)=0$

또, $t=-2$, $t=0$에서도 연속이어야 하므로 같은 방법으로 구하면

$g(-2)=0,\ g(0)=0$

STEP 3 $g(1)$의 값 구하기

즉, 함수 $g(x)$는 $x+4$, $x+2$, x를 인수로 갖고, 조건 (가)에서 삼차 이하의 다항함수이므로

$g(x)=ax(x+4)(x+2)$ (a는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 조건 (나)에서 $g(-3)=6$이므로

$3a=6 \quad \therefore a=2$

즉, $g(x)=2x(x+4)(x+2)$이므로

$g(1)=2\times 1\times 5\times 3=30$

풍쌤의 비법

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이고 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속일 때, 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$g(a)=0$

이어야 한다.

04

해결전략 | k의 값에 따라 주어진 방정식의 실근의 개수를 구한다.

STEP 1 $g(x)$의 극값 구하기

$g(x)=x^3+3x^2-k-2$로 놓으면

$g'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	$2-k$	↘	$-2-k$	↗

STEP 2 $f(k)$ 구하기

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-2$, $x=0$에서 극값을 가지므로 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수 $f(k)$는 다음과 같다.

(i) $g(-2)g(0)<0$, 즉 $-2<k<2$일 때

$f(k)=3$

(ii) $g(-2)g(0)=0$, 즉 $k=-2$ 또는 $k=2$일 때

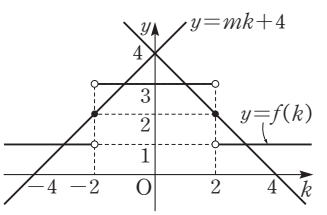
$f(k)=2$

(iii) $g(-2)g(0)>0$, 즉 $k<-2$ 또는 $k>2$일 때

$f(k)=1$

STEP 3 m의 값 곱 구하기

(i)~(iii)에 의하여 함수 $y=f(k)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y=mk+4$는 점 $(0, 4)$를 지나는 직선이므로 $f(k)=mk+4$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 직선 $y=mk+4$가 점 $(-2, 2)$ 또는 점 $(2, 2)$를 지나야 한다.

직선 $y=mk+4$가 점 $(-2, 2)$를 지날 때

$2=-2m+4$ $\therefore m=1$

직선 $y=mk+4$가 점 $(2, 2)$를 지날 때

$2=2m+4$ $\therefore m=-1$

따라서 모든 m의 값의 곱은 $1\times(-1)=-1$

05

해결전략 | $f'(t)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가짐을 이용한다.

STEP 1 시각 t에서의 속도 구하기

점 P의 속도는 $f'(t)=4t^3-12t+a$

이때 $t>0$이므로 점 P가 운동 방향을 두 번 바꾸려면 방정식 $f'(t)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

STEP 2 $y=g(t)$의 그래프 그리기

$f'(t)=0$에서 $-4t^3+12t=a$

$g(t)=-4t^3+12t$로 놓으면

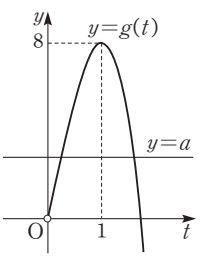
$g'(t)=-12t^2+12=-12(t+1)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because t>0$)

$t>0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$	(0)	↗	8	↘

따라서 $t>0$에서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



STEP 3 a의 값의 범위 구하기

$t>0$에서 직선 $y=a$가 $y=g(t)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나려면

$0<a<8$

06

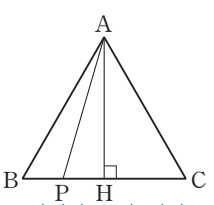
해결전략 | $\overline{AP}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타내어 원 C의 넓이를 t에 대한 함수로 나타낸다.

STEP 1 원 C의 넓이를 t로 나타내기

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $4<t<6$일 때, 점 P는 변 BC 위에 있으므로 t초 후에

$\overline{BP}$의 길이는 $(t-4)$ cm

$\overline{PH}=2-(t-4)=6-t$ (cm)



$t=4$일 때 점 P는 점 B와 같고
$t=6$일 때 점 P는 점 H와 같다.

$\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$ (cm)이므로 $\triangle APH$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AP}^2=(6-t)^2+(2\sqrt{3})^2=t^2-12t+48$

따라서 원 C의 넓이를 $S(t)$ cm^{2}라고 하면

$S(t)=\pi\times\overline{AP}^2=(t^2-12t+48)\pi$

STEP 2 $t=5$일 때 원 C의 넓이의 변화율 구하기

따라서 원 C의 넓이의 변화율은

$S'(t)=(2t-12)\pi$ $\therefore S'(5)=-2\pi$

따라서 구하는 원 C의 넓이의 변화율은 -2π cm^2/s이다.

07

해결전략 | 평행선 사이의 거리의 비를 이용하여 점 C의 가속도를 구한다.

STEP 1 ㄱ의 참, 거짓 판별하기

ㄱ. 광원 A의 속도는 $\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}$

물체 B의 속도는 $\frac{dy}{dt}=2t-\frac{11}{2}$

$t=\frac{5}{2}$일 때, $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{2}=\frac{dx}{dt}$

즉, 광원과 물체의 속도가 같아진다. (참)

STEP 2 ㄴ의 참, 거짓 판별하기

ㄴ. 두 직선 l, n 사이의 거리가 3이므로 $\overline{AC}=3$이려면 광원 A, 물체 B, 그림자 C가 일직선 위에 있어야 한다.

즉, A, B의 벽으로부터의 거리가 같아야 하므로

$4-\frac{1}{2}t=t^2-\frac{11}{2}t+10$, $t^2-5t+6=0$

$(t-2)(t-3)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=3$

따라서 $\overline{AC}=3$인 순간은 $t=2$, $t=3$의 두 번이다.

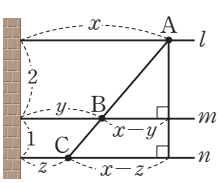
(참)

STEP 3 ㄷ의 참, 거짓 판별하기

ㄷ. $x-y=-t^2+5t-6=-\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

이므로 $2<t<3$에서 $x-y>0$ $\therefore x>y$

즉, $2<t<3$에서 광원 A가 물체 B보다 벽에서 멀리 떨어져 있으므로 벽에서부터 그림자 C까지의 거리를 z라고 하면 오른쪽 그림에서



$(x-z):(x-y)=3:2$

$2x-2z=3x-3y$, $2z=3y-x$

$\therefore z=\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}x$

$=\left(\frac{3}{2}t^2-\frac{33}{4}t+15\right)-\left(2-\frac{1}{4}t\right)$

$=\frac{3}{2}t^2-8t+13$

따라서 그림자 C의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\frac{dz}{dt}=3t-8$

$\therefore a=\frac{dv}{dt}=3$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07 부정적분

개념확인 218~219쪽

01 답 (1) $5x+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

(3) x^3+C (단, C는 적분상수)

02 답 (1) $3x^2+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $3x^2$

03 답 (1) $\frac{1}{10}x^{10}+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $6x+C$ (단, C는 적분상수)

(3) $\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

04 답 (1) $2x^5+C$ (단, C는 적분상수)

(2) x^4-2x^3+x+C (단, C는 적분상수)

(3) $\frac{1}{6}(2x+3)^3+C$ (단, C는 적분상수)

(4) $-\frac{1}{4}(-x+8)^4+C$ (단, C는 적분상수)

(1) $\int 10x^4dx=10\int x^4dx=10\times\frac{1}{5}x^5+C=2x^5+C$

(2) $\int(4x^3-6x^2+1)dx$

$=4\int x^3dx-6\int x^2dx+\int dx$

$=4\times\frac{1}{4}x^4-6\times\frac{1}{3}x^3+x+C$

$=x^4-2x^3+x+C$

(3) $\int(2x+3)^2dx=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times(2x+3)^3+C$

$=\frac{1}{6}(2x+3)^3+C$

(4) $\int(-x+8)^3dx=(-1)\times\frac{1}{4}\times(-x+8)^4+C$

$=-\frac{1}{4}(-x+8)^4+C$

필수유형 01 221쪽

01-1 답 6

해결전략 | 부정적분의 정의와 항등식의 성질을 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

STEP 1 부정적분의 정의 이용하기

$\int(4x^3+ax-3)dx=bx^4+x^2-cx+2$에서 부정적분의 정의에 의하여

$4x^3+ax-3=(bx^4+x^2-cx+2)'$

$=4bx^3+2x-c$

STEP 2 계수를 비교하여 $a+b+c$의 값 구하기

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$4b=4,\ 2=a,\ -c=-3$

따라서 $a=2,\ b=1,\ c=3$이므로

$a+b+c=2+1+3=6$

01-2 답 9

해결전략 | $\int\{f(x)+a\}dx=g(x)$이면 $f(x)+a=g'(x)$임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$\int\{f(x)-1\}dx=3x^2+2x-6$에서 부정적분의 정의에 의하여

$f(x)-1=(3x^2+2x-6)'$

$=6x+2$

$\therefore f(x)=6x+3$

STEP 2 $f(1)$의 값 구하기

$\therefore f(1)=6+3=9$

01-3 답 6

해결전략 | $\int(x+a)f(x)dx=g(x)$이면 $(x+a)f(x)=g'(x)$임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$\int(x-2)f(x)dx=2x^3-6x^2+7$에서 부정적분의 정의에 의하여

$(x-2)f(x)=(2x^3-6x^2+7)'$

$=6x^2-12x=6x(x-2)$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=6x$

STEP 2 $f(1)$의 값 구하기

$\therefore f(1)=6$

> 풍쌤의 비법
>
> 위의 풀이에서 $f(x)$를 구하지 않고, 곧바로 $(x-2)f(x)=6x^2-12x$의 양변에 $x=1$을 대입하여 $-f(1)=-6$에서 $f(1)=6$을 구할 수도 있다.

01-4 답 4

해결전략 | $\int xf(x)dx=g(x)$이면 $g'(x)=xf(x)$임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$\int xf(x)dx=2x^3-4x^2+C$에서 부정적분의 정의에 의하여

$xf(x)=(2x^3-4x^2+C)'$

$=6x^2-8x=x(6x-8)$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=6x-8$

STEP 2 $f(2)$의 값 구하기

$\therefore f(2)=12-8=4$

01-5 답 6

해결전략 | 함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이면 $F'(x)=f(x)$임을 이용한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$f(x)=F'(x)$

$=(x^3+ax^2+bx)'$

$=3x^2+2ax+b$

STEP 2 $b-a$의 값 구하기

$f(0)=3$에서 $b=3$

$f'(x)=6x+2a$이므로

$f'(1)=0$에서 $6+2a=0$

$\therefore a=-3$

$\therefore b-a=3-(-3)=6$

01-6 답 −15

해결전략 | 곱의 미분법을 이용하여 양변을 x에 대하여 미분하여 $h(x)$를 구한다.

STEP 1 $h(x)$ 구하기

$\int h(x)dx=f(x)g(x)$에서 부정적분의 정의에 의하여

$h(x)=\{f(x)g(x)\}'$

$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=2x(2x^2-5x+1)+(x^2-1)(4x-5)$

$=(4x^3-10x^2+2x)+(4x^3-5x^2-4x+5)$

$=8x^3-15x^2-2x+5$

STEP 2 함수 $h(x)$의 이차항의 계수 구하기

따라서 함수 $h(x)$의 이차항의 계수는 -15이다.

풍쌤의 비법

용어와 변수는 확실히 알아두자.

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

인티그럴 / 피적분 함수 / 적분 변수 / 원시 함수 / 적분상수

필수유형 02 223쪽

02-1 답 -13

해결전략 | 미분한 후 적분하면 적분상수 C가 생긴다는 점을 이용하여 $F(x)$를 간단히 한다.

STEP 1 $F(x)$ 간단히 하기

$$F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^3-3x^2\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^3-3x^2+C$$

STEP 2 적분상수 구하기

$F(1)=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}-3+C=\frac{1}{2}$ $\therefore C=3$

STEP 3 $F(-2)$의 값 구하기

따라서 $F(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+3$이므로

$F(-2)=-4-12+3=-13$

02-2 답 5

해결전략 | 적분한 후 미분하면 원래의 식이 된다는 점을 이용하여 좌변을 간단히 한 다음 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$\frac{d}{dx}\left\{\int x^2f(x)dx\right\}=x^2f(x)$이므로

$x^2f(x)=3x^3-x^2=x^2(3x-1)$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=3x-1$

STEP 2 $f(2)$의 값 구하기

$\therefore f(2)=6-1=5$

02-3 답 12

해결전략 | 적분한 후 미분하면 원래의 식이 된다는 점을 이용하여 좌변을 간단히 한 다음 양변의 계수를 비교하여 a, b, c의 값을 구한다.

STEP 1 등식의 좌변 간단히 하기

$\frac{d}{dx}\left\{\int(x^2+7x+a)dx\right\}=x^2+7x+a$이므로

$x^2+7x+a=bx^2+cx+4$

STEP 2 $a+b+c$의 값 구하기

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$b=1$, $c=7$, $a=4$

$\therefore a+b+c=4+1+7=12$

풍쌤의 비법

적분과 미분의 계산 순서에 따라 적분상수 C만큼 차이가 난다.

➡ 미분한 후 적분하면 적분상수 C가 붙는다.

➡ 적분한 후 미분하면 원래의 식이 된다.

02-4 답 14

해결전략 | 적분한 후 미분하면 원래의 식이 된다는 점을 이용하여 좌변을 간단히 한다.

STEP 1 등식의 좌변 간단히 하기

$\frac{d}{dx}\left\{\int(x-2)f(x)dx\right\}=(x-2)f(x)$이므로

$(x-2)f(x)=4x^3-x^2+k$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

위의 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=32-4+k$ $\therefore k=-28$

따라서

$(x-2)f(x)=4x^3-x^2-28=(x-2)(4x^2+7x+14)$

이므로

$f(x)=4x^2+7x+14$

STEP 3 $f(0)$의 값 구하기

$\therefore f(0)=14$

◉→ 다른 풀이

STEP 2 k의 값 구하기

위의 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=32-4+k$ $\therefore k=-28$

STEP 3 $f(0)$의 값 구하기

따라서 $(x-2)f(x)=4x^3-x^2-28$이므로 이 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-2f(0)=-28$ $\therefore f(0)=14$

02-5 답 -10

해결전략 | 미분한 후 적분하면 적분상수 C가 생긴다는 점을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=5x^3-2x^2$의 좌변 간단히 하기

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$f(x)+C=5x^3-2x^2$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$f(1)=2$이므로

$2+C=5-2 \quad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=5x^3-2x^2-1$

STEP 3 $g(-1)$의 값 구하기

따라서 $g(x)=f(x)+2x=5x^3-2x^2+2x-1$이므로

$g(-1)=-5-2-2-1=-10$

02-6 답 5

해결전략 | 미분한 후 적분하면 적분상수 C가 생긴다는 점을 이용하여 $F(x)$를 간단히 한다.

STEP 1 $F(x)$를 간단히 하여 $f(x)$ 대입하기

$$F(x)=\int\left[\frac{d}{dx}\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx$$
$$=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$$
$$=f(x)+C_2$$
$$=10x^{10}+9x^9+8x^8+\cdots+2x^2+x+C_2$$

STEP 2 $F(x)$ 구하기

$F(0)=-50$이므로 $C_2=-50$

$F(x)=10x^{10}+9x^9+8x^8+\cdots+2x^2+x-50$

STEP 3 $F(1)$의 값 구하기

$\therefore F(1)=10+9+8+\cdots+2+1-50$
$=55-50=5$

필수유형 03 225쪽

03-1 답 2

해결전략 | 적분한 후 미분하면 원래의 식이 된다는 점을 이용하여 방정식을 간단히 한 다음 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

STEP 1 방정식 간단히 하기

$\frac{d}{dx}\int(4x^2-5x)dx=4x^2-5x$,

$\frac{d}{dx}\int(3x^3-6)dx=3x^3-6$

이므로 주어진 방정식은

$3x^3+4x^2-5x-6=0$

STEP 2 모든 근의 곱 구하기

따라서 주어진 삼차방정식의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{-6}{3}=2$이다.

풍쌤의 비법

삼차방정식의 근과 계수의 관계

a, b, c, d가 실수인 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

03-2 답 2

해결전략 | 양변을 x에 대하여 적분하여 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$를 구한 다음 주어진 조건을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 $f(x)+g(x), f(x)-g(x)$ 구하기

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=3$의 양변을 x에 대하여 적분하면

$f(x)+g(x)=\int 3dx=3x+C_1$

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=3x^2+1$의 양변을 x에 대하여 적분하면

$f(x)-g(x)=\int(3x^2+1)dx=x^3+x+C_2$

이때 $f(0)=1$, $g(0)=2$이므로

$f(0)+g(0)=C_1=3$, $f(0)-g(0)=C_2=-1$

$\therefore f(x)+g(x)=3x+3$ ····· ㉠

$f(x)-g(x)=x^3+x-1$ ····· ㉡

STEP 2 $f(x), g(x)$ 구하기

㉠+㉡을 하면

$2f(x)=x^3+4x+2$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^3+2x+1$

㉠−㉡을 하면

$2g(x)=-x^3+2x+4$

$\therefore g(x)=-\frac{1}{2}x^3+x+2$

STEP 3 $f(1)-g(-1)$의 값 구하기

$\therefore f(1)-g(-1)=\left(\frac{1}{2}+2+1\right)-\left(\frac{1}{2}-1+2\right)=2$

03-3 답 4

해결전략 | 적분한 후 미분하면 원래의 식이 된다는 점을 이용하여 $f(x)$를 간단히 한 다음 $f(x)=(x+p)^2+q$ 꼴로 고친다.

STEP 1 $f(x)$를 간단히 한 다음 $f(x)=(x+p)^2+q$ 꼴로 고치기

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int(x^2+6x+k)dx$$
$$=x^2+6x+k$$
$$=(x+3)^2+k-9$$

STEP 2 k의 값 구하기

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 -5이므로

$k-9=-5 \quad \therefore k=4$

03-4 답 $k>\frac{1}{5}$

해결전략 | 적분한 후 미분하면 원래의 식이 된다는 점을 이용하여 부등식을 간단히 한다.

STEP 1 부등식 간단히 하기

$\frac{d}{dx}\int(5x^2-2x+k)dx=5x^2-2x+k$이므로 주어진 부등식은 $5x^2-2x+k>0$

STEP 2 k의 값의 범위 구하기

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차방정식 $5x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라고 할 때, $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-5k<0 \quad \therefore k>\frac{1}{5}$

03-5 답 1

해결전략 | 미분한 후 적분하면 적분상수 C가 생긴다는 점을 이용하여 식을 간단히 한 다음 주어진 조건을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 주어진 식 적분하기

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=4x+1$의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$f(x)+g(x)=\int(4x+1)dx=2x^2+x+C_1$$

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=6x^2-8x+3$의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$f(x)g(x)=\int(6x^2-8x+3)dx=2x^3-4x^2+3x+C_2$$

STEP 2 $f(x)$, $g(x)$ 구하기

이때 $f(0)=-2$, $g(0)=3$이므로

$f(0)+g(0)=C_1=1$, $f(0)g(0)=C_2=-6$

$\therefore f(x)+g(x)=2x^2+x+1$,

$f(x)g(x)=2x^3-4x^2+3x-6=(x-2)(2x^2+3)$

이때 $(x-2)+(2x^2+3)=2x^2+x+1=f(x)+g(x)$

이고 $f(x)$는 $f(0)=-2$인 일차함수, $g(x)$는 $g(0)=3$인 이차함수이므로

$f(x)=x-2$, $g(x)=2x^2+3$

STEP 3 $f(-2)+g(1)$의 값 구하기

$\therefore f(-2)+g(1)=(-2-2)+(2+3)=1$

◉→ 다른 풀이

STEP 1 $f(x)$, $g(x)$를 미지수를 이용하여 나타내고 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$를 간단히 하기

$f(x)$가 일차함수, $g(x)$가 이차함수이고 $f(0)=-2$, $g(0)=3$이므로

$f(x)=ax-2$, $g(x)=bx^2+cx+3$

(a, b, c는 상수, $a\neq0$, $b\neq0$)

로 놓으면

$f(x)+g(x)=(ax-2)+(bx^2+cx+3)$
$=bx^2+(a+c)x+1$

$f(x)g(x)=(ax-2)(bx^2+cx+3)$
$=abx^3+(ac-2b)x^2+(3a-2c)x-6$

STEP 2 a, b, c의 값 구하기

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2bx+a+c$이므로

$2bx+a+c=4x+1$에서 $b=2$, $a+c=1$

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3abx^2+2(ac-2b)x+3a-2c$
$=6ax^2+2(ac-4)x+3a-2c$

이므로

$6ax^2+2(ac-4)x+3a-2c=6x^2-8x+3$에서

$6a=6$, $2(ac-4)=-8$, $3a-2c=3$

$\therefore a=1$, $c=0$

STEP 3 $f(-2)+g(1)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x-2$, $g(x)=2x^2+3$이므로

$f(-2)+g(1)=(-2-2)+(2+3)=1$

03-6 답 5

해결전략 | 부정적분과 미분의 관계를 이용하여 $g(x)$와 $h(x)$를 구한다.

STEP 1 $g(x)$ 구하기

$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$이므로

$g(x)=f(x)=x^2+3x$

STEP 2 $h(x)$ 구하기

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$h(x)=f(x)+C=x^2+3x+C$

$h(-2)=1$이므로

$4-6+C=1 \quad \therefore C=3$

$\therefore h(x)=x^2+3x+3$

STEP 3 $g(1)+h(-2)$의 값 구하기

$\therefore g(1)+h(-1)=(1+3)+(1-3+3)=5$

필수유형 04

227쪽

04-1 답 (1) $\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $\frac{1}{2}xy^2+(1+3x^2)y+C$ (단, C는 적분상수)

(3) $\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y+C$ (단, C는 적분상수)

(4) x^2+2x+C (단, C는 적분상수)

해결전략 | 복잡한 피적분함수식을 전개하거나 인수분해하여 분자, 분모를 약분하면 식이 간단해지므로 간단해진 식을 부정적분의 성질과 x^n의 부정적분을 이용한다. 이때 적분변수를 확인하여 변수와 상수를 혼동하지 않도록 한다.

(1) $\int(x-1)(2x+3)dx$

$=\int(2x^2+x-3)dx$

$=2\int x^2dx+\int xdx-\int 3dx$

$=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x+C$ (단, C는 적분상수)

(2) 적분변수가 y이므로 x를 상수로 보고 y에 대하여 적분하면

$\int(1+xy+3x^2)dy$

$=x\int ydy+\int(1+3x^2)dy$

$=\frac{1}{2}xy^2+(1+3x^2)y+C$ (단, C는 적분상수)

(3) $\int\frac{y^4+y^2+1}{y^2+y+1}dy$

$=\int\frac{(y^2+y+1)(y^2-y+1)}{y^2+y+1}dy$

$=\int(y^2-y+1)dy$

$=\int y^2dy-\int ydy+\int dy$

$=\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y+C$ (단, C는 적분상수)

(4) $\int(1+\sqrt{x})^2dx+\int(1-\sqrt{x})^2dx$

$=\int\{(1+\sqrt{x})^2+(1-\sqrt{x})^2\}dx$

$=\int(1+2\sqrt{x}+x+1-2\sqrt{x}+x)dx$

$=\int(2x+2)dx=2\int xdx+\int 2dx$

$=x^2+2x+C$ (단, C는 적분상수)

04-2 답 8

해결전략 | 부정적분을 한 다음 주어진 조건을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 부정적분하기

$f(x)=\int(4x^3+3x^2+2x+1)dx$

$=x^4+x^3+x^2+x+C$

STEP 2 적분상수 구하기

$f(0)=-2$이므로 $C=-2$

STEP 3 $f(-2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x-2$이므로

$f(-2)=16-8+4-2-2=8$

04-3 답 62

해결전략 | 피적분함수를 하나의 부정적분으로 나타내고 약분하여 피적분함수를 간단히 한 후 부정적분을 한다. 그 다음 주어진 조건을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 부정적분하기

$f(x)=\int\frac{x^3}{x+1}dx+\int\frac{1}{x+1}dx$

$=\int\frac{x^3+1}{x+1}dx$

$=\int\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$

$=\int(x^2-x+1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

STEP 2 적분상수 구하기

$f(0)=2$이므로 $C=2$

STEP 3 $f(6)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+2$이므로

$f(6)=72-18+6+2=62$

04-4 답 −8

해결전략 | 피적분함수를 하나로 합쳐 전개하여 식을 간단히 한 다음 부정적분을 한다. 그 다음 주어진 조건을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 부정적분하기

$$\begin{aligned}f(x)&=\int(\sqrt{x}-2)^2dx+\int(\sqrt{x}+2)^2dx\\&=\int\{(\sqrt{x}-2)^2+(\sqrt{x}+2)^2\}dx\\&=\int(x-2\sqrt{x}+4+x+2\sqrt{x}+4)dx\\&=\int(2x+8)dx\\&=x^2+8x+C\end{aligned}$$

STEP 2 적분상수 구하기

$f(0)=4$이므로 $C=4$

STEP 3 $f(-2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^2+8x+4$이므로

$f(-2)=4-16+4=-8$

> 풍쌤의 비법
>
> 각각의 함수의 부정적분을 구하는 과정은 복잡하지만 하나의 함수로 합치면 소거되는 항이 있어 간단히 부정적분을 구할 수 있다.

04-5 답 $\frac{2}{11}$

해결전략 | 부정적분을 구한 다음 주어진 조건을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 부정적분하기

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{10}x^{10}\right)dx\\&=\frac{1}{1\times2}x^2+\frac{1}{2\times3}x^3+\frac{1}{3\times4}x^4+\cdots\\&\qquad+\frac{1}{10\times11}x^{11}+C\end{aligned}$$

STEP 2 적분상수 구하기

$f(1)=\frac{12}{11}$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{10\times11}+C\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\\&\qquad+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+C\\&=1-\frac{1}{11}+C\\&=\frac{10}{11}+C=\frac{12}{11}\end{aligned}$$

$\therefore C=\frac{2}{11}$

STEP 3 $f(0)$의 값 구하기

따라서

$$f(x)=\frac{1}{1\times2}x^2+\frac{1}{2\times3}x^3+\frac{1}{3\times4}x^4+\cdots+\frac{1}{10\times11}x^{11}+\frac{2}{11}$$

이므로

$f(0)=\frac{2}{11}$

> 풍쌤의 비법
>
> **부분분수로의 변형**
>
> $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

04-6 답 4

해결전략 | $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$임을 이용하여 $g(x)$를 간단히 한다.

STEP 1 $g(x)$ 간단히 하기

$$\begin{aligned}g(x)&=\int xf'(x)dx+\int f(x)dx\\&=\int\{xf'(x)+f(x)\}dx\\&=\int\left[\frac{d}{dx}\{xf(x)\}\right]dx\\&=xf(x)+C\\&=x\times\frac{x+2}{x}+C\\&=x+2+C\end{aligned}$$

STEP 2 적분상수 구하기

$g(1)=0$이므로

$1+2+C=0 \quad \therefore C=-3$

STEP 3 $g(5)$의 값 구하기

따라서 $g(x)=x-1$이므로

$g(5)=5-1=4$

필수유형 05 229쪽

05-1 답 2

해결전략 | $f'(x)$를 적분하여 $f(x)$를 구한 다음 주어진 조건을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 적분하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-3x^2+2)dx$$
$$=-x^3+2x+C$$

STEP 2 적분상수 구하기

$f(1)=4$이므로

$-1+2+C=4 \quad \therefore C=3$

STEP 3 $f(-1)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=-x^3+2x+3$이므로

$f(-1)=1-2+3=2$

05-2 답 −13

해결전략 | $f'(x)$를 적분하여 $f(x)$를 구한 다음 주어진 조건을 이용하여 적분상수와 a의 값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 적분하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2ax+1)dx$$
$$=x^3+ax^2+x+C$$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$f(0)=1$, $f(1)=2$이므로

$C=1$, $1+a+1+C=2$

$\therefore a=-1$, $C=1$

$\therefore f(x)=x^3-x^2+x+1$

STEP 3 $f(-2)$의 값 구하기

$\therefore f(-2)=-8-4-2+1=-13$

05-3 답 $\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+C$ (단, C는 적분상수)

해결전략 | $f'(x)$를 적분하여 $f(x)$를 구한 다음 주어진 조건을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 적분하기

$f'(x)=6x^2-4x+1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-4x+1)dx$$
$$=2x^3-2x^2+x+C_1$$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$f(0)=4$이므로 $C_1=4$

$\therefore f(x)=2x^3-2x^2+x+4$

STEP 3 $f(x)$를 바르게 적분한 식 구하기

따라서 $f(x)$를 바르게 적분한 식은

$$\int(2x^3-2x^2+x+4)dx=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+C$$

(단, C는 적분상수)

05-4 답 $\frac{13}{5}$

해결전략 | 분수식이 나올 경우 인수분해 공식을 이용하여 약분한 다음 적분한다.

STEP 1 $f'(x)$ 적분하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x^8-1}{x^4+1}dx$$
$$=\int\frac{(x^4+1)(x^4-1)}{x^4+1}dx=\int(x^4-1)dx$$
$$=\frac{1}{5}x^5-x+C$$

STEP 2 적분상수 구하기

$f(1)=1$이므로

$\frac{1}{5}-1+C=1 \quad \therefore C=\frac{9}{5}$

STEP 3 $f(-1)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x+\frac{9}{5}$이므로

$f(-1)=-\frac{1}{5}+1+\frac{9}{5}=\frac{13}{5}$

풍쌤의 비법

분수식을 간단히 할 때는 대부분 인수분해 공식이 사용된다. 기본적인 인수분해 공식을 기억해 두도록 하자.

① $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

② $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

③ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

05-5 답 4

해결전략 | 주어진 조건의 식을 적분하여 $f(x)$, $g(x)$를 구한 다음 적분상수를 구한다.

STEP 1 $f(x)g(x)$ 구하기

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}$이므로

조건 (가)에서

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2-8x+5$

위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(3x^2-8x+5)dx$

$f(x)g(x)=x^3-4x^2+5x+C$ …… ㉠

조건 (나)의 $f(x)=(x-2)g(x)$에서 $f(2)=0$이므로

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)g(2)=8-16+10+C$

$0=2+C$ $\therefore C=-2$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-4x^2+5x-2$

$=(x-2)(x-1)^2$ …… ㉡

STEP 2 $g(x)$ 구하기

조건 (나)의 $f(x)=(x-2)g(x)$를 ㉡에 대입하면

$(x-2)\{g(x)\}^2=(x-2)(x-1)^2$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$\{g(x)\}^2=(x-1)^2$

$\therefore g(x)=x-1$ ($\because$ (다)) …… ㉢

STEP 3 $f(x)$ 구하기

㉢을 ㉡에 대입하면

$f(x)(x-1)=(x-2)(x-1)^2$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$

STEP 4 $f(3)+g(3)$의 값 구하기

$\therefore f(3)+g(3)=(9-9+2)+(3-1)=4$

05-6 답 -7

해결전략 | $f'(x)$를 적분하고 $f(0)=1$을 이용하여 $f(x)$를 구한 다음 $f(x)$를 적분하고 $F(1)=-\frac{3}{2}$을 이용하여 $F(x)$를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$f'(x)=6x(x-2)=6x^2-12x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-12x)dx$

$=2x^3-6x^2+C_1$

$f(0)=1$이므로 $C_1=1$

$\therefore f(x)=2x^3-6x^2+1$

STEP 2 $F(x)$ 구하기

$\therefore F(x)=\int f(x)dx=\int(2x^3-6x^2+1)dx$

$=\frac{1}{2}x^4-2x^3+x+C_2$

$F(1)=-\frac{3}{2}$이므로

$\frac{1}{2}-2+1+C_2=-\frac{3}{2}$ $\therefore C_2=-1$

$\therefore F(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+x-1$

STEP 3 나머지 구하기

따라서 $F(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$F(2)=8-16+2-1=-7$

> 풍쌤의 비법
>
> **나머지정리**
>
> 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$이다.

필수유형 06 231쪽

06-1 답 $f(x)=-3x^2+2x+2$

해결전략 | $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$임을 이용하여 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분해 $f'(x)$를 구한다. 그 다음 $f'(x)$를 적분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$ …… ㉠

$F(x)=xf(x)+\underbrace{x^2(2x-1)}_{2x^3-x^2}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)+xf'(x)+6x^2-2x$

$f(x)=f(x)+xf'(x)+6x^2-2x$ ($\because$ ㉠)

$xf'(x)=-6x^2+2x=x(-6x+2)$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$f'(x)=-6x+2$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-6x+2)dx$

$=-3x^2+2x+C$

$f(1)=1$이므로

$-3+2+C=1$ $\therefore C=2$

$\therefore f(x)=-3x^2+2x+2$

06-2 답 $f(x)=-8x^3+9x^2-1$

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 다음 적분한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$ …… ㉠

$F(x)-xf(x)=6x^4-6x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하

면

$f(x)-f(x)-xf'(x)=24x^3-18x^2$ ($\because$ ㉠)

$xf'(x)=-24x^3+18x^2=x(-24x^2+18x)$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$f'(x)=-24x^2+18x$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-24x^2+18x)dx$

$=-8x^3+9x^2+C$

$f(1)=0$이므로

$-8+9+C=0 \quad \therefore C=-1$

$\therefore f(x)=-8x^3+9x^2-1$

06-3 답 -8

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 다음 적분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$ ····· ㉠

$xf(x)-F(x)=x^3-4x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=3x^2-8x$ ($\because$ ㉠)

$xf'(x)=3x^2-8x=x(3x-8)$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$f'(x)=3x-8$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-8)dx$

$=\frac{3}{2}x^2-8x+C$

$f(-1)=10$이므로

$\frac{3}{2}+8+C=10 \quad \therefore C=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+\frac{1}{2}$

STEP 3 $f'(2)+f(1)$의 값 구하기

$\therefore f'(2)+f(1)=(6-8)+\left(\frac{3}{2}-8+\frac{1}{2}\right)=-8$

06-4 답 8

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 다음 적분하여 $f(x)$를 구한다. 그 다음 $f(x)=a(x+p)^2+q$ 꼴로 고쳐서 최댓값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$\int f(x)dx=(x+2)f(x)+x^3-12x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+2)f'(x)+3x^2-12$

$(x+2)f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$f'(x)=-3(x-2)=-3x+6$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-3x+6)dx$

$=-\frac{3}{2}x^2+6x+C$

$f(0)=2$이므로 $C=2$

STEP 3 최댓값 구하기

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+6x+2=-\frac{3}{2}(x-2)^2+8$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때, 최댓값 8을 갖는다.

06-5 답 30

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 다음 적분한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$\int\{f(x)+12x^2\}dx=(x+2)f(x)-3x^4-4x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+12x^2=f(x)+(x+2)f'(x)-12x^3-12x^2$

$(x+2)f'(x)=12x^3+24x^2=12x^2(x+2)$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$f'(x)=12x^2$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int 12x^2dx=4x^3+C$

이때 $f(1)=2$이므로

$4+C=2 \quad \therefore C=-2$

$\therefore f(x)=4x^3-2$

STEP 3 $f(2)$의 값 구하기

$\therefore f(2)=32-2=30$

06-6 답 9

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분한 다음 양변의 차수를 비교하여 $f(x)$의 차수를 유추한다.

STEP 1 양변을 x에 대하여 미분하기

$f(x)+\int xf(x)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+xf(x)=x^3-x^2+5x-1$ …… ㉠

STEP 2 $f(x)$의 차수를 유추하여 식 설정하기

$f(x)$를 n차 함수라고 하면 $xf(x)$는 $(n+1)$차 함수이므로 ㉠에서

$n+1=3 \quad \therefore n=2$

즉, $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

STEP 3 $f(x)$, $f'(x)$를 대입하여 미지수 구하기

$f(x)=ax^2+bx+c$, $f'(x)=2ax+b$를 ㉠에 대입하면

$2ax+b+x(ax^2+bx+c)=x^3-x^2+5x-1$

$\therefore ax^3+bx^2+(2a+c)x+b=x^3-x^2+5x-1$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=1$, $b=-1$, $2a+c=5$

$\therefore c=3$

STEP 4 $f(3)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^2-x+3$이므로

$f(3)=9-3+3=9$

필수유형 07 233쪽

07-1 답 $-\frac{9}{2}$

해결전략 I 각 구간별로 적분한 다음 주어진 조건과 함수가 $x=-1$에서 연속임을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 적분하기

$f(x)=\int f'(x)dx$이므로

(i) $x<-1$일 때, $f(x)=\int kdx=kx+C_1$

(ii) $x\geq-1$일 때, $f(x)=\int(x-3)dx=\frac{1}{2}x^2-3x+C_2$

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} kx+C_1 & (x<-1) \\ \frac{1}{2}x^2-3x+C_2 & (x\geq-1) \end{cases}$$

STEP 2 k의 값 구하기

$f(-2)=6$이므로 $-2k+C_1=6$ …… ㉠

$f(0)=-2$이므로 $C_2=-2$

이때 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$f(-1)=\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)$에서

$-k+C_1=\frac{1}{2}+3+C_2$

$\therefore -k+C_1=\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$C_1=-3$, $k=-\frac{9}{2}$

풍쌤의 비법

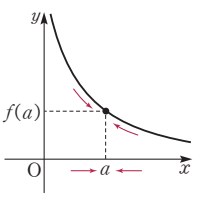
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 조건

(1) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있다.

(2) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

$\iff \lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)$

(3) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$



07-2 답 4

해결전략 I 각 구간별로 적분한 다음 주어진 조건과 함수가 연속임을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 적분하기

$f(x)=\int f'(x)dx$이므로

(i) $x\leq1$일 때, $f(x)=\int3x^2dx=x^3+C_1$

(ii) $x>1$일 때, $f(x)=\int(4x-1)dx=2x^2-x+C_2$

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^3+C_1 & (x<1) \\ 2x^2-x+C_2 & (x\geq1) \end{cases}$$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$f(0)=-2$이므로 $C_1=-2$

이때 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$에서

$1+C_1=2-1+C_2 \quad \therefore C_2=C_1=-2$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} x^3-2 & (x<1) \\ 2x^2-x-2 & (x\geq1) \end{cases}$$

STEP 3 $f(2)$의 값 구하기

$\therefore f(2)=8-2-2=4$

> 풍쌤의 비법
>
> **미분가능성과 연속성**
>
> (1) 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.
>
> (2) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

07-3 답 10

해결전략 | 각 구간별로 적분한 다음 주어진 조건과 함수가 연속임을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 적분하기

$f(x)=\int f'(x)dx$이므로

(i) $x<1$일 때, $f(x)=\int(x^2-2x)dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+C_1$

(ii) $x>1$일 때, $f(x)=\int 4x\,dx=2x^2+C_2$

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x^2+C_1 & (x<1)\\ 2x^2+C_2 & (x>1)\end{cases}$$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$f(0)=3$이므로 $C_1=3$

또, 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $f(1)=\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$에서

$\frac{1}{3}-1+C_1=2+C_2$, $\frac{1}{3}-1+3=2+C_2$

$\therefore C_1=\frac{1}{3}$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x^2+3 & (x<1)\\ 2x^2+\frac{1}{3} & (x\geq1)\end{cases}$$

STEP 3 $f(-1)+f(2)$의 값 구하기

$\therefore f(-1)+f(2)=\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)+\left(8+\frac{1}{3}\right)=10$

07-4 답 7

해결전략 | 그래프를 나타내는 함수식을 각 구간별로 적분한 다음 주어진 조건과 함수가 연속임을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 적분하기

그래프가 나타내는 함수식을 구하면

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & (x<0)\\ 2x-2 & (x\geq0)\end{cases}$$ 이므로

$$f(x)=\begin{cases}-2x+C_1 & (x<0)\\ x^2-2x+C_2 & (x\geq0)\end{cases}$$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\,1)$을 지나므로

$4-4+C_2=1$ $\therefore C_2=1$

또, 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $f(0)=\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)$에서

$C_2=C_1=1$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-2x+1 & (x<0)\\ x^2-2x+1 & (x\geq0)\end{cases}$$

STEP 3 $f(-1)+f(3)$의 값 구하기

$\therefore f(-1)+f(3)=(2+1)+(9-6+1)=7$

07-5 답 12

해결전략 | 그래프를 나타내는 함수식을 각 구간별로 적분한 다음 주어진 조건과 함수가 연속임을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 적분하기

그래프를 나타내는 함수식을 구하면

$$f'(x)=\begin{cases}4 & (x<2)\\ -2x+8 & (x\geq2)\end{cases}$$ 이므로

$$f(x)=\begin{cases}4x+C_1 & (x<2)\\ -x^2+8x+C_2 & (x\geq2)\end{cases}$$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=0$ $\therefore C_1=0$

또, 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $f(2)=\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)$에서

$8=-4+16+C_2$ $\therefore C_2=-4$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}4x & (x<2)\\ -x^2+8x-4 & (x\geq2)\end{cases}$$

STEP 3 $f(4)$의 값 구하기

$\therefore f(4)=-16+32-4=12$

07-6 답 24

해결전략 | 절댓값 기호를 없앤 함수식을 각 구간별로 적분한 다음 주어진 조건과 함수가 연속임을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 적분하기

$f'(x)=\begin{cases}3x & (x<0)\\ x & (x\geq 0)\end{cases}$ 이므로

$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2+C_1 & (x<0)\\ \frac{1}{2}x^2+C_2 & (x\geq 0)\end{cases}$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$f(0)=-2$이므로 $C_2=-2$

또, 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $f(0)=\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)$에서

$C_2=C_1=-2$

$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2-2 & (x<0)\\ \frac{1}{2}x^2-2 & (x\geq 0)\end{cases}$

STEP 3 $f(4)f(-2)$의 값 구하기

$\therefore f(4)f(-2)=(8-2)\times(6-2)=24$

필수유형 08 235쪽

08-1 답 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+x+3$

해결전략 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 도함수 $f'(x)$와 같으므로 적분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x+1$이므로

$f'(x)=3x+1$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x+1)dx$

$=\frac{3}{2}x^2+x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$f(0)=C=3$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x^2+x+3$

08-2 답 7

해결전략 | 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 도함수 $f'(x)$와 같으므로 적분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $4x-1$이므로

$f'(x)=4x-1$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x-1)dx=2x^2-x+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

$\therefore f(x)=2x^2-x+1$

STEP 3 $f(2)$의 값 구하기

$\therefore f(2)=8-2+1=7$

08-3 답 52

해결전략 | 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 도함수 $f'(x)$와 같으므로 적분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 설정하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^2에 정비례하므로 $f'(x)=ax^2$ (a는 상수)으로 놓는다.

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax^2dx=\frac{a}{3}x^3+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-1, 0)$, $(0, -2)$를 지나므로

$f(-1)=-\frac{a}{3}+C=0$ ····· ㉠

$f(0)=C=-2$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-6$

$\therefore f(x)=-2x^3-2$

STEP 3 $f(-3)$의 값 구하기

$\therefore f(-3)=54-2=52$

08-4 답 -6

해결전략 | 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 도함수 $f'(x)$와 같으므로 적분한 다음 곡선이 지나는 점과 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $-9x+k$이므로

$f'(x)=-9x+k$

STEP 2 적분상수 구하기

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-9x+k)dx$

$=-\frac{9}{2}x^2+kx+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, -6)$을 지나므로

$f(0)=C=-6$

STEP 3 $f(x)$ 구하기

$\therefore f(x)=-\frac{9}{2}x^2+kx-6$

방정식 $-\frac{9}{2}x^2+kx-6=0$, 즉 $9x^2-2kx+12=0$의 모든 근의 합이 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{2k}{9}=2$ $\therefore k=9$

$\therefore f(x)=-\frac{9}{2}x^2+9x-6$

STEP 4 $f(2)$의 값 구하기

$\therefore f(2)=-18+18-6=-6$

풍쌤의 비법

이차방정식의 근과 계수의 관계

a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$

08-5 답 10

해결전략 | 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 도함수 $f'(x)$와 같으므로 적분한 다음 최솟값을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $2x-6$이므로 $f'(x)=2x-6$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-6)dx$

$=x^2-6x+C=(x-3)^2-9+C$

함수 $f(x)$의 최솟값이 -6이므로

$-9+C=-6$ $\therefore C=3$

$\therefore f(x)=x^2-6x+3$

STEP 3 최댓값 구하기

따라서 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값을 가지므로 $f(x)$의 최댓값은

$f(-1)=1+6+3=10$

08-6 답 −12

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 다음 적분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\int(kx^2-4x+4)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=kx^2-4x+4$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서 접선의 기울기가 9이므로

$f'(1)=k=9$

$\therefore f(x)=\int(9x^2-4x+4)dx$

$=3x^3-2x^2+4x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$f(1)=3-2+4+C=2$ $\therefore C=-3$

$\therefore f(x)=3x^3-2x^2+4x-3$

STEP 3 $f(-1)$의 값 구하기

$\therefore f(-1)=-3-2-4-3=-12$

필수유형 09 237쪽

09-1 답 −3

해결전략 | 주어진 극한식을 간단히 하여 $f'(x)$를 구한 다음 적분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 극한식 간단히 하기

$\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x-h)-f(x)\}-\{f(x-2h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\times(-1)$

$+\lim_{h\to0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}\times2$

$=-f'(x)+2f'(x)=f'(x)$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

즉, $f'(x)=4x^3+6$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3+6)dx$

$=x^4+6x+C$

이때 $f(1)=0$이므로

$1+6+C=0$ $\therefore C=-7$

$\therefore f(x)=x^4+6x-7$

STEP 3 $f(-2)$의 값 구하기

$\therefore f(-2)=16-12-7=-3$

09-2 답 18

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구하고 극한식을 간단히 하여 그 값을 구한다.

STEP 1 주어진 극한식을 간단히 하기

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

STEP 2 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\int(x+2)(x^2-2x+4)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+8$

STEP 3 주어진 극한식의 값 구하기

따라서 구하는 값은

$2f'(1)=2\times(1+8)=18$

09-3 답 19

해결전략 | $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타내고 주어진 조건을 적용시켜 적분상수와 미정계수를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 간단히 하기

$\int\left\{\frac{d}{dx}(4x^3-ax^2)\right\}dx=4x^3-ax^2+C$이므로

$f(x)=4x^3-ax^2+C$ …… ㉠

STEP 2 $f(1)=6$을 이용하여 관계식 세우기

이때 $f(1)=6$이므로 $f(1)=4-a+C=6$

$\therefore a-C=-2$ …… ㉡

STEP 3 a의 값 구하기

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로 $f'(1)=2$

㉠에서 $f'(x)=12x^2-2ax$이므로

$f'(1)=12-2a=2 \quad \therefore a=5$

$a=5$를 ㉡에 대입하면 $C=7$

STEP 4 $f(2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=4x^3-5x^2+7$이므로

$f(2)=32-20+7=19$

09-4 답 -30

해결전략 | $f(x)=\int(x^2-4x+a)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하고 미분계수의 정의를 이용하여 a의 값을 구한 다음 $f(0)=6$을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 극한식 간단히 하기

$$\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}$$

$$=f'(-3)=12$$

STEP 2 a의 값 구하기

$f(x)=\int(x^2-4x+a)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-4x+a$

$f'(-3)=12$이므로

$9+12+a=12 \quad \therefore a=-9$

STEP 3 $f(x)$ 구하기

$f(x)=\int(x^2-4x-9)dx=\frac{1}{3}x^3-2x^2-9x+C$

$f(0)=6$이므로 $C=6$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-9x+6$

STEP 4 $f(3)$의 값 구하기

$\therefore f(3)=9-18-27+6=-30$

09-5 답 $f(x)=2x^2+5x-7$

해결전략 | 조건 (가)를 이용하여 $f'(x)$를 적분한 다음 조건 (나)를 이용하여 적분상수와 미정계수를 구해 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

조건 (나)에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=f'(1)=2a-1$$

$f'(1)=4+a=2a-1$에서 $a=5$

$\therefore f'(x)=4x+5$

STP 2 $f(x)$ 구하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x+5)dx$$

$$=2x^2+5x+C$$

$f(1)=2+5+C=0$에서 $C=-7$

$\therefore f(x)=2x^2+5x-7$

풍쌤의 비법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면

$\lim_{x\to a}f(x)=0$임을 이용하여 $f(x)$ 또는 $g(x)$에 포함되어 있는 미정계수를 구할 수 있다.

09-6 답 $f(x)=2x^2-7x+6$

해결전략 | 주어진 식으로부터 $f'(x)$를 유추하여 설정한 다음 적분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 설정하기

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x-1}=4$이므로 $f'(x)$는 일차항의 계수가 4인 일차함수이다.

즉, $f'(x)=4x+k$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.

STEP 2 $f'(x)$ 구하기

조건 (나)에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $f(2)=0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=1$$

$f'(2)=8+k=1$에서 $k=-7$

$\therefore f'(x)=4x-7$

STEP 3 $f(x)$ 구하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x-7)dx$$
$$=2x^2-7x+C$$

$f(2)=8-14+C=0$에서 $C=6$

$\therefore f(x)=2x^2-7x+6$

풍쌤의 비법

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n}=\alpha$ (α는 실수)이면

① $\alpha\neq 0$일 때, $f(x)$는 최고차항의 계수가 α인 n차함수

② $\alpha=0$일 때, $f(x)$는 $(n-1)$차 이하의 함수

필수유형 10 239쪽

10-1 답 -8

해결전략 | 주어진 식에 $a=0$, $b=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구하고, 도함수의 정의에 주어진 식을 적용시킨다.

STEP 1 $f(0)$의 값 구하기

$f(a+b)=f(a)+f(b)$에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$

STEP 2 $f'(x)$ 구하기

도함수의 정의에 의하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h-0}$$
$$=f'(0)=2$$

STEP 3 $f(x)$ 구하기

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int 2dx=2x+C$$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=2x$

STEP 4 $f(-4)$의 값 구하기

$\therefore f(-4)=-8$

◉→ 다른 풀이

STEP 2 $f'(0)=2$에 미분계수의 정의 적용하기

$f'(0)=2$이므로 미분계수의 정의에 의하여

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0)+f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

STEP 3 $f'(x)$ 구하기

도함수의 정의에 의하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=2\ (\because ㉠)$$

10-2 답 -1

해결전략 | 주어진 식에 $a=0$, $b=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구한 다음 미분계수와 도함수의 정의를 이용하여 $f'(0)$, $f'(x)$를 구하는 과정에 주어진 식을 적용시킨다.

STEP 1 $f(0)$의 값 구하기

$f(a+b)=f(a)+f(b)+3$에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+3$

$\therefore f(0)=-3$

STEP2 $f'(0)=-2$에 미분계수의 정의 적용하기

미분계수의 정의에 의하여 $f'(0)$의 값을 구하면

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+3}{h}=-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

STEP3 $f'(x)$ 구하기

도함수의 정의에 의하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+3-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+3}{h}=-2\ (\because ㉠)$$

STEP4 $f(x)$ 구하기

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2)dx=-2x+C$

$f(0)=-3$이므로 $C=-3$

$\therefore f(x)=-2x-3$

STEP5 $f(-1)$의 값 구하기

$\therefore f(-1)=2-3=-1$

10-3 답 −20

해결전략 I 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구한 다음 미분계수와 도함수의 정의를 이용하여 $f'(1)$, $f'(x)$를 구하는 과정에 주어진 식을 적용시킨다.

STEP1 $f(0)$의 값 구하기

$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$

STEP2 $f'(1)=2$에 미분계수의 정의 적용하기

$f'(1)=2$이므로 미분계수의 정의에 의하여

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)-h-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}-1=2$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

STEP3 $f'(x)$ 구하기

도함수의 정의에 의하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}-x=3-x\ (\because ㉠)$$

STEP4 $f(x)$ 구하기

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3-x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+3x+C$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x$$

STEP5 $f(-4)$의 값 구하기

$\therefore f(-4)=-8-12=-20$

10-4 답 20

해결전략 I 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구하고, 도함수의 정의에 주어진 식을 적용시킨다.

STEP1 $f(0)$의 값 구하기

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$

STEP2 $f'(x)$ 구하기

도함수의 정의에 의하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+2x$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h-0}+2x$$

$$=f'(0)+2x$$

STEP3 $f(x)$ 구하기

$f'(0)=a$라고 하면 $f'(x)=2x+a$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+a)dx=x^2+ax+C$$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=x^2+ax$

이때 $f(1)=2$이므로

$f(1)=1+a=2 \quad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=x^2+x$

STEP4 $f(-5)$의 값 구하기

$\therefore f(-5)=25-5=20$

10-5 답 3

해결전략 | 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구한 다음 미분계수와 도함수의 정의를 이용하여 $f'(1)$, $f'(x)$를 구하는 과정에 주어진 식을 적용시킨다.

STEP 1 $f(0)$의 값 구하기

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)+3$에

$x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+3$

$\therefore f(0)=-3$

STEP 2 $f'(1)=0$에 미분계수의 정의 적용하기

$f'(1)=0$이므로 미분계수의 정의에 의하여

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)+h(1+h)+3-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+3}{h}+1=0$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(h)+3}{h}=-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

STEP 3 $f'(x)$ 구하기

도함수의 정의에 의하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+xh(x+h)+3-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)+3}{h}+x(x+h)\right\}$$

$$=x^2-1 \ (\because ㉠)$$

STEP 4 $f(x)$ 구하기

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-1)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-x+C$$

$f(0)=-3$이므로 $C=-3$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x-3$

STEP 5 $f(3)$의 값 구하기

$\therefore f(3)=9-3-3=3$

10-6 답 12

해결전략 | 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구하고, 도함수의 정의에 주어진 식을 적용시켜 $f'(x)$, $f(x)$를 구한 다음 이것을 주어진 극한식에 대입하여 $f'(0)$의 값을 구한다.

STEP 1 $f(0)$의 값 구하기

$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy+\frac{1}{2}$에

$x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+\frac{1}{2}$

$\therefore f(0)=-\frac{1}{2}$

STEP 2 $f'(x)$ 구하기

도함수의 정의에 의하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-xh+\frac{1}{2}-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-xh+\frac{1}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h}-x\right\} \ \left(\because f(0)=-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-x+f'(0)$$

STEP 3 $f(x)$ 구하기

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\{-x+f'(0)\}dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+f'(0)x+C$$

$f(0)=-\frac{1}{2}$이므로 $C=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2+f'(0)x-\frac{1}{2}$

STEP 4 $f'(0)$의 값 구하기

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left\{-\frac{1}{2}x^2+f'(0)x-\frac{1}{2}\right\}-\{-x+f'(0)\}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2}(x-1)^2+f'(0)(x-1)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2}(x-1)}{x+1}+\lim_{x\to 1}\frac{f'(0)}{x+1}$$

$$=0+\frac{f'(0)}{2}=6$$

$\therefore f'(0)=12$

필수유형 11 241쪽

11-1 답 $f(x)=-x^3+6x^2+4$

해결전략 | 그래프를 보고 $f'(x)$를 구한 다음 극댓값, 극솟값

을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$f'(x)=ax(x-4)$ $(a<0)$로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax(x-4)dx$$

$$=\int (ax^2-4ax)dx$$

$$=\frac{a}{3}x^3-2ax^2+C$$

STEP 2 극대 · 극소 판정하기

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값, $x=4$에서 극댓값을 갖는다.

STEP 3 $f(x)$ 구하기

$f(0)=4$이므로 $C=4$

$f(4)=36$이므로 $\frac{64}{3}a-32a+C=36$

$-\frac{32}{3}a+4=36$ $\therefore a=-3$

$\therefore f(x)=-x^3+6x^2+4$

11-2 답 $\frac{22}{3}$

해결전략 I 그래프를 보고 $f'(x)$를 구한 다음 극댓값을 이용하여 이용하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f'(x)=a(x+1)^2-1$ $(a>0)$로 놓으면

$f'(0)=0$이므로

$a-1=0$ $\therefore a=1$

$\therefore f'(x)=x^2+2x=x(x+2)$

STEP 2 극댓값을 갖는 경우 찾기

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로

$f(-2)=2$

STEP 3 $f(x)$ 구하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (x^2+2x)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3+x^2+C$$

$f(-2)=2$이므로

$-\frac{8}{3}+4+C=2$ $\therefore C=\frac{2}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{2}{3}$

STEP 4 $f(2)$의 값 구하기

$\therefore f(2)=\frac{8}{3}+4+\frac{2}{3}=\frac{22}{3}$

11-3 답 $-\frac{29}{3}$

해결전략 I $f(x)$를 미분하여 $f'(x)$를 구하고, 극댓값을 이용하여 $f(x)$를 구한 다음 극솟값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\int (x^2-2x-3)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

STEP 2 극대 · 극소 판정하기

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 가지므로 $f(-1)=1$

STEP 3 $f(x)$ 구하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (x^2-2x-3)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$$

$f(-1)=1$이므로

$-\frac{1}{3}-1+3+C=1$ $\therefore C=-\frac{2}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x-\frac{2}{3}$

STEP 4 $f(x)$의 극솟값 구하기

따라서 $f(x)$의 극솟값은

$f(3)=9-9-9-\frac{2}{3}=-\frac{29}{3}$

11-4 답 20

해결전략 I 이차함수 $f'(x)$의 식을 유추한 다음 적분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이다.

조건 (나)에서 $f'(2)=0$

조건 (가)에서 $f'(-2)=f'(2)=0$이므로

$f'(x)=3(x+2)(x-2)=3x^2-12$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-12)dx$$
$$=x^3-12x+C$$

또, 조건 (나)에서 $f(2)=-5$이므로

$8-24+C=-5 \quad \therefore C=11$

$\therefore f(x)=x^3-12x+11$

STEP 3 $f(-3)$의 값 구하기

$\therefore f(-3)=-27+36+11=20$

◉→ 다른 풀이

해결전략 | 삼차함수 $f(x)$의 식을 가정한 다음 $f'(x)$를 구하여 해결한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(-x)=3x^2-2ax+b$

조건 (가)에서 $3x^2+2ax+b=3x^2-2ax+b$

$\therefore a=0$

$\therefore f'(x)=3x^2+b$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

조건 (나)에서 $f'(2)=0$이므로

$12+b=0 \quad \therefore b=-12$

$\therefore f'(x)=3x^2-12$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-12)dx=x^3-12x+C$$

또, 조건 (나)에서 $f(2)=-5$이므로

$8-24+C=-5 \quad \therefore C=11$

$\therefore f(x)=x^3-12x+11$

STEP 3 $f(-3)$의 값 구하기

$\therefore f(-3)=-27+36+11=20$

11-5 $-6\sqrt{3}$

해결전략 | 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$를 구한 다음 $f'(x)$를 이용하여 극대 · 극소를 판정한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1-f(x)=-x^3+9x+1$

$\therefore f(x)=x^3-9x$

STEP 2 극대 · 극소 판정하기

$f'(x)=3x^2-9=3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$에서 극댓값, $x=\sqrt{3}$에서 극솟값을 갖는다.

STEP 3 $\alpha+\beta+\gamma$의 값 구하기

$\alpha=-\sqrt{3}$, $\beta=\sqrt{3}$이고,

$f(\sqrt{3})=3\sqrt{3}-9\sqrt{3}=-6\sqrt{3}$이므로

$\gamma=-6\sqrt{3}$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=-\sqrt{3}+\sqrt{3}+(-6\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$

11-6 56

해결전략 | $f'(x)$의 최고차항의 계수가 3임을 이용하여 $f'(x)$의 식을 구한 다음 극대인 경우를 찾는다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이다.

이때 $f'(2)=f'(8)=0$이므로

$f'(x)=3(x-2)(x-8)$

STEP 2 극대인 경우 찾기

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=8$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	8	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 가지므로

$f(2)=66$

STEP 3 $f(x)$ 구하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 3(x-2)(x-8)dx$$
$$=\int(3x^2-30x+48)dx$$
$$=x^3-15x^2+48x+C$$

$f(2)=66$이므로

$f(2)=8-60+96+C=66$

$\therefore C=22$

$\therefore f(x)=x^3-15x^2+48x+22$

STEP 4 $f(1)$의 값 구하기

$\therefore f(1)=1-15+48+22=56$

◉→ 다른 풀이

해결전략 | 삼차함수 $f(x)$의 식을 가정한 다음 $f'(x)$를 구하여 해결한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(2)=f'(8)=0$이므로

$f'(2)=12+4a+b=0$

$f'(8)=192+16a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-15$, $b=48$

$\therefore f(x)=x^3-15x^2+48x+c$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	8	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 가지므로

$f(2)=8-60+96+c=66$

$\therefore c=22$

$\therefore f(x)=x^3-15x^2+48x+22$

STEP 2 $f(1)$의 값 구하기

$\therefore f(1)=1-15+48+22=56$

실전 연습 문제 242~244쪽

01 ⑤ **02** 8 **03** ② **04** 18

05 −2 **06** −30 **07** −4 **08** ③ **09** 7

10 $-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+5x+C$ (단, C는 적분상수)

11 ④ **12** ④ **13** 2 **14** ① **15** 3

16 −16 **17** ⑤ **18** 10

01

해결전략 | 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $g(x)$를 먼저 구하고 주어진 조건을 적용시킨다.

STEP 1 $g(x)$ 구하기

$\int g(x)dx=x^4f(x)+4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=4x^3f(x)+x^4f'(x)$

STEP 2 $g(1)$의 값 구하기

$\therefore g(1)=4f(1)+f'(1)$

$=4\times(-1)+6$

$=2$

02

해결전략 | 적분한 후 미분하면 원래의 식이 된다는 점을 이용하여 주어진 등식을 간단히 나타낸다.

STEP 1 등식의 좌변 간단히 하기

$\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^3-4x^2+7)dx\right\}=ax^3-4x^2+7$이므로

$ax^3-4x^2+7=5x^3+bx^2+c$

STEP 2 $a+b+c$의 값 구하기

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=5$, $b=-4$, $c=7$

$\therefore a+b+c=5+(-4)+7=8$

03

해결전략 | 미분한 후 적분하면 적분상수를 포함한 식이 생긴다. 이때 주어진 조건을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 $F(x)$를 간단히 하여 $f(x)$ 대입하기

$F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$

$\therefore F(x)=10x^{10}+9x^9+\cdots+2x^2+x+C$

STEP 2 $F(x)$ 구하기

$F(0)=4$이므로 $C=4$

$\therefore F(x)=10x^{10}+9x^9+\cdots+2x^2+x+4$

STEP 3 $F(-1)$의 값 구하기

$\therefore F(-1)=10-9+8-7+\cdots+2-1+4=9$

04

해결전략 | 미분한 후 적분하면 적분상수 C가 생긴다는 점을 이용하여 식을 간단히 한 다음 $f(x)=(x+p)^2+q$ 꼴로 고쳐 최솟값을 이용한다.

STEP 1 $f(x)$ 간단히 하기

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+4x-3)\right\}dx$

$=x^2+4x-3+C$

$=(x+2)^2+C-7$

STEP 2 적분상수 구하기

함수 $f(x)$의 최솟값이 2이므로

$C-7=2$ $\therefore C=9$

STEP 3 $f(2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^2+4x+6$이므로

$f(2)=4+8+6=18$

05

해결전략 | 미분한 후 적분하면 원래의 식에 적분상수가 붙음을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f(x)$의 식 정리하기

$$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+2x)\right\}dx$$
$$=x^2+2x+C$$
$$=(x+1)^2+C-1 \quad \cdots\cdots ❶$$

STEP 2 적분상수 구하기

$y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=4$에 접하므로 꼭짓점 $(-1, C-1)$은 직선 $y=4$ 위에 있다.

즉, $C-1=4$이므로 $C=5$ $\cdots\cdots ❷$

STEP 3 모든 실근의 합 구하기

$\therefore f(x)=(x+1)^2+4=x^2+2x+5$

이때 $f(x)=8$에서 $x^2+2x+5=8$

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$-3+1=-2$ $\cdots\cdots ❸$

채점 요소	배점
❶ $f(x)$의 식 정리하기	40 %
❷ 적분상수 구하기	30 %
❸ 모든 실근의 합 구하기	30 %

06

해결전략 | 조건 (가), (나)의 식을 연립하여 $f(x)$, $g(x)$를 구한 다음 주어진 조건을 적용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

조건 (가), (나)의 두 식을 변끼리 더하면

$$2f(x)=\int(2x^2+4x)dx+\int(x^2-8x)dx$$
$$=\int(3x^2-4x)dx=x^3-2x^2+C_1$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{C_1}{2}$$

조건 (다)에서 $f(0)=2$이므로 $C_1=4$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^3-x^2+2$$

STEP 2 $g(x)$ 구하기

조건 (가), (나)의 두 식을 변끼리 빼면

$$2g(x)=\int(x^2+12x)dx=\frac{1}{3}x^3+6x^2+C_2$$

$$\therefore g(x)=\frac{1}{6}x^3+3x^2+\frac{C_2}{2}$$

조건 (다)에서 $g(0)=0$이므로 $C_2=0$

$$\therefore g(x)=\frac{1}{6}x^3+3x^2$$

STEP 3 $f(1)-g(3)$의 값 구하기

$$\therefore f(1)-g(3)=\left(\frac{1}{2}-1+2\right)-\left(\frac{9}{2}+27\right)=-30$$

07

해결전략 | 피적분함수를 합쳐서 하나의 함수로 간단히 나타내어 적분한다.

STEP 1 $f(x)$ 간단히 하기

$$f(x)=\int\frac{2x^2}{x+2}dx+\int\frac{3x}{x+2}dx-\int\frac{2}{x+2}dx$$
$$=\int\frac{2x^2+3x-2}{x+2}dx$$
$$=\int\frac{(x+2)(2x-1)}{x+2}dx$$
$$=\int(2x-1)dx=x^2-x+C \quad \cdots\cdots ❶$$

STEP 2 적분상수 구하기

$f(0)=-4$이므로 $C=-4$ $\cdots\cdots ❷$

$\therefore f(x)=x^2-x-4$

STEP 3 모든 근의 곱 구하기

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -4이다. $\cdots\cdots ❸$

채점 요소	배점
❶ $f(x)$ 간단히 하기	60 %
❷ 적분상수 구하기	20 %
❸ 모든 근의 곱 구하기	20 %

08

해결전략 | 미분과 적분의 관계를 이용하여 주어진 식을 변형하여 보기의 참, 거짓을 판단한다.

STEP 1 ㄱ의 참, 거짓 판단하기

ㄱ. 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\int f'(x)dx-\int 2xdx=\int\{f'(x)-2x\}dx$$
$$=f(x)-x^2+C$$

$\therefore \int f'(x)dx-\int 2xdx=f(x)-x^2+C$ (참)

STEP 2 ㄴ의 참, 거짓 판단하기

ㄴ. 주어진 식의 좌변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)f(x)$

주어진 식의 우변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)f'(x)$

$\therefore \int f'(x)f(x)dx\neq\{f(x)\}^2+C$ (거짓)

STEP 3 ㄷ의 참, 거짓 판단하기

ㄷ. 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\int f(x)dx+\int xf'(x)dx=\int\{f(x)+xf'(x)\}dx$$

이때 $f(x)+xf'(x)=\frac{d}{dx}xf(x)$이므로

$$\int\{f(x)+xf'(x)\}dx=\int\left\{\frac{d}{dx}xf(x)\right\}dx$$
$$=xf(x)+C$$

$\therefore \int f(x)dx+\int xf'(x)dx=xf(x)+C$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

09

해결전략 | 수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1이고, y절편이 같음을 이용하여 직선의 방정식을 먼저 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$과 수직인 직선의 기울기는 2이고 두 직선이 y축 위의 한 점에서 만나므로 y절편은 1이다.

따라서 $y=f'(x)$의 그래프의 식은 $f'(x)=2x+1$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$$

이때 $f(0)=f'(0)=1$이므로 $C=1$

$\therefore f(x)=x^2+x+1$

STEP 3 $f(2)$의 값 구하기

$\therefore f(2)=4+2+1=7$

10

해결전략 | 미분한 식을 적분하고 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$를 구한 다음 이를 적분한다.

STEP 1 $f'(x)$ 적분하기

$f'(x)=-3x^2+4x-5$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-3x^2+4x-5)dx$$
$$=-x^3+2x^2-5x+C_1 \quad \cdots\cdots ❶$$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$f(1)=1$이므로

$-1+2-5+C_1=1 \quad \therefore C_1=5$

$\therefore f(x)=-x^3+2x^2-5x+5 \quad \cdots\cdots ❷$

STEP 3 바르게 적분한 식 구하기

따라서 $f(x)$를 바르게 적분한 식은

$$\int(-x^3+2x^2-5x+5)dx$$
$$=-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+5x+C$$ (단, C는 적분상수)

$\cdots\cdots ❸$

채점 요소	배점
❶ $f'(x)$ 적분하기	40 %
❷ $f(x)$ 구하기	30 %
❸ 바르게 적분한 식 구하기	30 %

11

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$, $f'(x)$의 관계식을 구한 다음 $f(x)$의 식을 설정하여 대입한다.

STEP 1 $f(x)$, $f'(x)$의 관계식 구하기

$x^2f(x)-\int xf(x)dx=4x^3-x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)-xf(x)=12x^2-2x$

$xf(x)=-x^2f'(x)+12x^2-2x$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=-xf'(x)+12x-2 \quad \cdots\cdots ㉠$

STEP 2 $f(x)=ax+b$로 놓고 대입하기

$f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ $(a\neq0)$로 놓으면

$f'(x)=a$이므로 ㉠에서

$ax+b=-ax+12x-2$

$ax+b=(-a+12)x-2$

STEP 3 a, b의 값 구하기

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a=-a+12$, $b=-2$

$\therefore a=6$

STEP 4 k의 값 구하기

따라서 $f(x)=6x-2$이므로

$f(k)=10$에서 $6k-2=10$

$6k=12 \quad \therefore k=2$

12

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$

를 먼저 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

이차함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$ ..... ㉠

$F(x)-\int(x+1)f(x)dx=-4x^4+2x^3-5x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-(x+1)f(x)=-16x^3+6x^2-10x$ ($\because$ ㉠)

$-xf(x)=-16x^3+6x^2-10x$

$=-x(16x^2-6x+10)$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=16x^2-6x+10$

STEP 2 모든 근의 곱 구하기

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$

13

해결전략 | 차수를 비교하여 $g(x)$와 $x^2+f(x)$의 차수를 판단한 다음 $f(x)$를 설정하여 대입한다.

STEP 1 $g(x)$ 유추하기

$f(x)$가 이차함수이고 $f(x)g(x)$가 사차함수이므로 $g(x)$는 이차함수이다.

이때 $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$이므로 $x^2+f(x)$는 일차함수이다.

따라서 $x^2+f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$f(x)=-x^2+ax+b$

$g(x)=\int(x^2-x^2+ax+b)dx=\int(ax+b)dx$

$=\frac{a}{2}x^2+bx+C$

STEP 2 $f(x)g(x)$의 식과 비교하여 미정계수 구하기

$f(x)g(x)=(-x^2+ax+b)\left(\frac{a}{2}x^2+bx+C\right)$

$=-\frac{a}{2}x^4+\left(\frac{a^2}{2}-b\right)x^3+\left(\frac{3}{2}ab-C\right)x^2$

$+(aC+b^2)x+bC$

$\therefore -\frac{a}{2}x^4+\left(\frac{a^2}{2}-b\right)x^3+\left(\frac{3}{2}ab-C\right)x^2$

$+(aC+b^2)x+bC$

$=-2x^4+8x^3$

위의 등식의 양변의 계수를 비교하면

$-\frac{a}{2}=-2$, $\frac{a^2}{2}-b=8$, $\frac{3}{2}ab-C=0$,

$aC+b^2=0$, $bC=0$

$\therefore a=4$, $b=0$, $C=0$

STEP 3 $g(1)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=-x^2+2x$, $g(x)=2x^2$이므로

$g(1)=2$

◉→ 다른 풀이

STEP 2 $f(x)g(x)$의 식과 비교하여 미정계수 구하기

$f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$이므로 $g(x)$의 최고차항은 2이다.

즉, $\frac{a}{2}=2$ $\therefore a=4$

따라서 $f(x)=-x^2+4x+b$, $g(x)=2x^2+bx+C$이고 $f(x)g(x)$의 상수항의 계수가 0이므로 $b=0$ 또는 $c=0$

또, 일차항의 계수가 0이므로 $b^2+4c=0$

$\therefore b=0$, $c=0$

→ (i) $b=0$이면 $4c=0$ $\therefore c=0$

(ii) $c=0$이면 $b^2=0$ $\therefore b=0$

14

해결전략 | 절댓값 기호를 포함한 함수는 기준이 되는 x의 값을 기준으로 나누어 표현하고, 그 기준이 되는 x의 값에서 함수가 연속임을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$를 구간을 나누어 나타내기

$f'(x)=x+|x-1|$을 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값 $x=1$을 기준으로 구간을 나누어 나타내면

(i) $x<1$일 때, $f'(x)=x-(x-1)=1$

(ii) $x\geq1$일 때, $f'(x)=x+(x-1)=2x-1$

(i), (ii)에 의하여 함수 $f'(x)$는

$f'(x)=\begin{cases}1 & (x<1)\\ 2x-1 & (x\geq1)\end{cases}$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

따라서 $f(x)=\begin{cases}x+C_1 & (x<1)\\ x^2-x+C_2 & (x\geq1)\end{cases}$이고 $f(-1)=3$

이므로

$-1+C_1=3$ $\therefore C_1=4$

이때 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $f(1)=\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$에서

$1+C_1=C_2=5$

$\therefore f(x)=\begin{cases}x+4 & (x<1)\\ x^2-x+5 & (x\geq1)\end{cases}$

STEP 3 $f(0)+f(2)$의 값 구하기

$\therefore f(0)+f(2)=4+(4-2+5)=11$

15

해결전략 | 접점의 좌표를 (a, b)로 놓고 $f'(a)=-1$, $f(a)=b$임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

STEP 1 $f'(a)=-1$임을 이용하여 접점의 좌표 구하기

곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=-x+3$에 접하므로 직선 $y=-x+3$과 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를 (a, b)로 놓으면 $f'(a)=-1$이다.

즉, $f'(x)=6x^2+12x+5$에 대하여

$f'(a)=6a^2+12a+5=-1$이므로

$6(a+1)^2=0 \quad \therefore a=-1$

이때 점 (a, b)가 직선 $y=-x+3$ 위에 있으므로

$b=-a+3$에서 $b=1+3=4$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 4)$이다. …… ❶

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2+12x+5)dx$$
$$=2x^3+6x^2+5x+C$$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, 4)$를 지나므로

$f(-1)=-2+6-5+C=4$

$\therefore C=5$

$\therefore f(x)=2x^3+6x^2+5x+5$ …… ❷

STEP 3 $f(-2)$의 값 구하기

$\therefore f(-2)=-16+24-10+5=3$ …… ❸

채점 요소	배점
❶ $f'(a)=-1$임을 이용하여 접점의 좌표 구하기	40 %
❷ $f(x)$ 구하기	40 %
❸ $f(-2)$의 값 구하기	20 %

16

해결전략 | 주어진 조건을 이용하여 $f'(x)$를 구한 다음 적분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2a$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow0$이다.

즉, $f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2a$$

$f'(1)=11+a=2a$이므로 $a=11$

$\therefore f'(x)=3x^2+8x+11$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+8x+11)dx$$
$$=x^3+4x^2+11x+C$$

$f(1)=1+4+11+C=0$에서 $C=-16$

$\therefore f(x)=x^3+4x^2+11x-16$

STEP 3 $f(0)$의 값 구하기

$\therefore f(0)=-16$

17

해결전략 | 주어진 식에 $a=0$, $b=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구한 다음 미분계수와 도함수의 정의를 이용하여 $f'(1)$과 $f'(x)$를 구하는 과정에 주어진 식을 적용시킨다.

STEP 1 $f(0)$의 값 구하기

$f(a+b)=f(a)+f(b)-ab$에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$

STEP 2 $f'(1)=9$에 미분계수의 정의 적용하기

$f'(1)=9$이므로 미분계수의 정의에 의하여

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-h-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-1=9$$

$\therefore \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}=10$ …… ㉠

STEP 3 $f'(x)$ 구하기

도함수의 정의에 의하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-x=10-x\ (\because ㉠)$$

STEP 4 $f(x)$ 구하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-x+10)dx$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+10x+C$$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+10x$

STEP 5 $f'(2)+f(2)$의 값 구하기

$\therefore f'(2)+f(2)=(10-2)+(-2+20)=26$

18

해결전략 | 그래프를 보고 $f'(x)$의 식을 구한 다음 극대인 경우를 찾는다. 이때 그래프를 보고 극대, 극소인 경우를 판단하도록 한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

도함수 $y=f'(x)$에서 그래프는 위로 볼록하고, x축과 x좌표가 -1, 3인 점에서 만나므로

$f'(x)=a(x+1)(x-3)$ $(a<0)$로 놓을 수 있다.

주어진 그래프에서 $f'(0)=6$이므로

$f'(0)=-3a=6$ $\quad\therefore a=-2$

$\therefore f'(x)=-2(x+1)(x-3)=-2x^2+4x+6$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x^2+4x+6)dx$$

$$=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x+C$$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ -8)$을 지나므로

$f(0)=C=-8$

$$\therefore f(x)=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x-8$$

STEP 3 극댓값 구하기

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 가지므로

$f(3)=-18+18+18-8=10$

상위권 도약 문제 245~246쪽

01 90 **02** -1 **03** 10 **04** 12
05 3 **06** -5 **07** 4 **08** 64

01

해결전략 | 미분과 적분의 관계를 이용하여 $f_5(x)$와 $f_8(x)$를 구해 본다.

STEP 1 $f_9(x)$, $f_8(x)$, …를 구하기

$f_{n+1}(x)=\int f_n(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f_n(x)={f_{n+1}}'(x)$

$f_{10}(x)=x^{12}+1$이므로

$f_9(x)={f_{10}}'(x)=12x^{11}$

$f_8(x)={f_9}'(x)=12\times11x^{10}$

$f_7(x)={f_8}'(x)=12\times11\times10x^9$

$f_6(x)={f_7}'(x)=12\times11\times10\times9x^8$

$f_5(x)={f_6}'(x)=12\times11\times10\times9\times8x^7$

STEP 2 식의 값 구하기

$$\therefore \frac{f_5(2)}{f_8(2)}=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times2^7}{12\times11\times2^{10}}=90$$

02

해결전략 | $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$에서 부정적분을 이용하여 $f(x)g(x)$를 구한다.

STEP 1 $f(x)g(x)$ 구하기

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$$f(x)g(x)=\int\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx$$

$$=\int(3x^2-19)dx$$

$$=x^3-19x+C$$

위의 식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C$에서 $(-10)\times(-3)=C$

$\therefore C=30$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-19x+30$

$$=(x+5)(x-2)(x-3)$$

STEP 2 $f(x)$, $g(x)$ 구하기

$f(x)$, $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 다항함수이고

$f(0)=-10$, $g(0)=-3$이므로

$f(x)=(x+5)(x-2)$, $g(x)=x-3$

STEP 3 식의 값 구하기

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{(f\circ g)(x)}=\frac{f(1)g(1)}{(f\circ g)(1)}$$

$$=\frac{(-6)\times(-2)}{f(-2)}$$

$$=\frac{12}{-12}=-1$$

03

해결전략 | 미분과 적분의 관계를 이용하여 $f_n(x)$를 구해 본다.

STEP 1 ${f_{i+1}}'(x)$를 적분한 다음 $i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 대입하여 규칙 찾기

$f_{i+1}(x)=\int(n+i)f_i(x)dx$의 양변에 $i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례대로 대입해 보면

$f_2(x)=\int(n+1)f_1(x)dx=\int x^{n+1}dx$

$=\frac{1}{n+2}x^{n+2}+C_1$

$f_2(0)=0$이므로 $C_1=0$

$\therefore f_2(x)=\frac{1}{n+2}x^{n+2}$

$f_3(x)=\int(n+2)f_2(x)dx=\int x^{n+2}dx$

$=\frac{1}{n+3}x^{n+3}+C_2$

$f_3(0)=0$이므로 $C_2=0$

$\therefore f_3(x)=\frac{1}{n+3}x^{n+3}$

$\vdots$

따라서 $f_i(x)=\frac{1}{n+i}x^{n+i}$이다.

STEP 2 n의 값 구하기

$\frac{1}{f_i(x)}=\frac{n+i}{x^{n+i}}$이므로 $\frac{1}{f_i(1)}=n+i$

$\frac{1}{f_1(1)}+\frac{1}{f_2(1)}+\frac{1}{f_3(1)}+\cdots+\frac{1}{f_n(1)}$

$=(n+1)+(n+2)+(n+3)+\cdots+(n+10)$

$=10n+55$

따라서 $10n+55=155$이므로

$10n=100 \quad \therefore n=10$

◉⟶ 다른 풀이

STEP 2 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f_i(1)}$을 n에 대한 식으로 나타내기

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f_i(1)}=\sum_{i=1}^{n}(n+i)=\sum_{i=1}^{n}n+\sum_{i=1}^{n}i$

$=n^2+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3n^2+n}{2}=155$

STEP 3 n의 값 구하기

$3n^2+n=310$, $3n^2+n-310=0$

$(3n+31)(n-10)=0$

$\therefore n=10$ ($\because n$은 자연수)

풍쌤의 비법

수열의 합 $\sum$

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

04

해결전략 | 주어진 식에서 $f(x)$의 차수를 유추하여 $f(x)$의 식을 설정한 다음 대입하여 미정계수를 구한다.

STEP 1 $f'(x)+xf(x)$ 구하기

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=f'(x)+g'(x)$

$=x^3+6x^2-2x+6$

$g(x)=\int xf(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=xf(x)$

$\therefore f'(x)+xf(x)=x^3+6x^2-2x+6$ ····· ㉠

STEP 2 $f(x)$를 설정하여 대입하기

$f(x)$의 차수를 n이라고 하면 ㉠의 좌변의 차수는 $n+1$이고, 우변의 차수가 3이므로 $f(x)$는 이차식이다.

우변의 x^3의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=2x+a$

이것을 ㉠에 대입하면

$(2x+a)+x(x^2+ax+b)=x^3+6x^2-2x+6$

STEP 3 $f(2)$의 값 구하기

$x^3+ax^2+(b+2)x+a=x^3+6x^2-2x+6$

양변의 계수를 비교하면

$a=6$, $b=-4$

따라서 $f(x)=x^2+6x-4$이므로

$f(2)=4+12-4=12$

05

해결전략 | 구간을 나누어 $f'(x)$를 구한 다음 적분한다. 이때 함수 $f(x)$가 연속임을 이용하여 적분상수를 구한다.

STEP 1 $x<0$일 때, $f(x)$ 구하기

(i) $x<0$일 때,

$f'(x)=-2x+1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x+1)dx$

$=-x^2+x+C_1$

$f(-2)=0$이므로

$-4-2+C_1=0 \quad \therefore C_1=6$

$\therefore f(x)=-x^2+x+6$

STEP 2 $x>0$일 때, $f(x)$ 구하기

(ii) $x>0$일 때,

$f'(x)=a(x-1)^2-1$ ($a<0$)로 놓으면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\{a(x-1)^2-1\}dx$

$$=\int(ax^2-2ax+a-1)dx$$

$$=\frac{a}{3}x^3-ax^2+(a-1)x+C_2$$

$f(2)=0$이므로

$\frac{2}{3}a-2+C_2=0$ $\quad\therefore C_2=2-\frac{2}{3}a$

$\therefore f(x)=\frac{a}{3}x^3-ax^2+(a-1)x+2-\frac{2}{3}a$

STEP 3 함수 $f(x)$가 연속임을 이용하여 미정계수 구하기

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $f(0)=\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)$에서

$2-\frac{2}{3}a=6$ $\quad\therefore a=-6$

STEP 4 $f(1)$의 값 구하기

따라서 $x>0$에서 $f(x)=-2x^3+6x^2-7x+6$이므로

$f(1)=-2+6-7+6=3$

06

해결전략 | 주어진 식에 $a=0$, $b=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구한 다음 미분계수와 도함수의 정의에 주어진 식을 적용시킨다.

STEP 1 $f(0)$의 값 구하기

$f(a+b)=f(a)+f(b)+kab$에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$

STEP 2 $f'(-2)=4$에 미분계수의 정의 적용하기

$f'(-2)=4$이므로 미분계수의 정의에 의하여

$$f'(-2)=\lim_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-2)+f(h)-2kh-f(-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-2k=4$$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=4+2k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

STEP 3 $f'(x)$ 구하기

도함수의 정의에 의하여 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+kxh-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+kx\right\}$$

$=4+2k+kx$ ($\because$ ㉠)

STEP 4 k의 값 구하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4+2k+kx)dx$$

$$=\frac{k}{2}x^2+(2k+4)x+C$$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

또, $f(-2)=2$이므로 $2k-2(2k+4)=2$

$-2k=10$ $\quad\therefore k=-5$

07

해결전략 | $f'(x)$의 식을 유추하여 적분한 다음 주어진 극값을 이용하여 미정계수를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$의 식 설정하기

$f'(2-x)=f'(2+x)$이므로 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(4)=4$, $f'(4)=0$

이때 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$f'(4)=f'(0)=0$

따라서 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프는 위로 볼록한 포물선이고 x축과 두 점 $(0, 0)$, $(4, 0)$에서 만나므로

$f'(x)=ax(x-4)$ $(a<0)$로 놓을 수 있다.

STEP 2 $f'(x)$ 적분하기

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax(x-4)dx$$

$$=\int(ax^2-4ax)dx=\frac{a}{3}x^3-2ax^2+C$$

STEP 3 극대, 극소를 판정하여 미정계수와 적분상수 구하기

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 -4를 갖고, $x=4$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(0)=C=-4$

$f(4)=\frac{64}{3}a-32a-4=4$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{4}$

STEP 4 $f(-2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2-4$이므로

$f(-2)=2+6-4=4$

풍쌤의 비법

$f(p-x)=f(p+x)$의 의미

$x=p$를 기준으로 왼쪽, 오른쪽으로 일정한 간격만큼 떨어진 x의 값에 대한 함숫값이 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=p$에 대하여 대칭인 함수이다.

※ 일반적으로 $f(A)=f(B)$에서 $A+B=$(상수)이면 $f(x)$는 대칭인 함수이다.

08

해결전략 | $xF(x)$의 식을 구하여 극대, 극소를 판정하고 극솟값을 이용하여 p의 값을 구한다.

STEP 1 $F(x)$ 구하기

$f(x)=3x^2+2ax+b$의 부정적분 중 하나가 $F(x)$이므로

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(3x^2+2ax+b)dx$$
$$=x^3+ax^2+bx+C$$

STEP 2 계수를 비교하여 a, b를 p로 나타내기

이때 a, b는 양수이고 $F(x)=k(x+p)^3$이므로

$k=1$, $p>0$ ($\because$ a, b는 양수)

즉, $x^3+ax^2+bx+C=x^3+3px^2+3p^2x+p^3$이므로

$a=3p$, $b=3p^2$ …… ㉠

STEP 3 $xF(x)$의 극대, 극소인 경우 판단하기

$xF(x)=x(x+p)^3$에서

$$\{xF(x)\}'=(x+p)^3+3x(x+p)^2$$
$$=(x+p)^2(4x+p)$$

$\{xF(x)\}'=0$에서 $x=-p$ 또는 $x=-\frac{p}{4}$

함수 $xF(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	$-p$	…	$-\frac{p}{4}$	…
$\{xF(x)\}'$	$-$	0	$-$	0	$+$
$xF(x)$	↘		↘	극소	↗

STEP 4 p의 값 구하기

따라서 $xF(x)$는 $x=-\frac{p}{4}$에서 극솟값 $-\frac{1}{3}$을 가지므로

$$\left(-\frac{p}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}p\right)^3=-\frac{1}{3},\ p^4=\frac{4^4}{3^4}$$

$\therefore p=\frac{4}{3}$ ($\because p>0$) …… ㉡

STEP 5 $3ab$의 값 구하기

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=4$, $b=\frac{16}{3}$

$\therefore 3ab=3\times4\times\frac{16}{3}=64$

08 정적분

개념확인 248~249쪽

01 답 (1) 1 (2) 56 (3) 6 (4) 24

(1) $\int_0^1 2x\,dx=\left[x^2\right]_0^1=1$

(2) $\int_0^4(5x+4)dx=\left[\frac{5}{2}x^2+4x\right]_0^4=40+16=56$

(3) $\int_{-2}^1(3y^2-1)dy=\left[y^3-y\right]_{-2}^1$
$=(1-1)-(-8+2)=6$

(4) $\int_3^1(-3x^2+1)dx=\int_1^3(3x^2-1)dx$
$=\left[x^3-x\right]_1^3$
$=(27-3)-(1-1)=24$

02 답 (1) 9 (2) −10 (3) 12

(1) $\int_1^2(3x^2+2x-1)dx=\left[x^3+x^2-x\right]_1^2$
$=(8+4-2)-(1+1-1)=9$

(2) $\int_5^3\frac{x^2}{x-1}dx-\int_5^3\frac{1}{x-1}dx$
$=\int_5^3\frac{x^2-1}{x-1}dx=\int_5^3\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}dx$
$=-\int_3^5(x+1)dx$
$=-\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_3^5$
$=-\left\{\left(\frac{25}{2}+5\right)-\left(\frac{9}{2}+3\right)\right\}=-10$

(3) $\int_0^2(x^2+1)dx+\int_2^3(t^2+1)dt$
$=\int_0^2(x^2+1)dx+\int_2^3(x^2+1)dx$
$=\int_0^3(x^2+1)dx$
$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^3$
$=9+3=12$

03 답 (1) 2 (2) 32

(1) $\int_{-1}^1(2x+1)dx=\int_{-1}^1 1\,dx=2\int_0^1 1\,dx$
$=2\left[x\right]_0^1=2$

(2) $\int_{-2}^{2}(5x^4+3x^3-6x^2)dx=\int_{-2}^{2}(5x^4-6x^2)dx$

$=2\int_{0}^{2}(5x^4-6x^2)dx$

$=2\left[x^5-2x^3\right]_0^2$

$=2(32-16)=32$

04 답 (1) x^2-2x (2) $12x+12$

(1) $\frac{d}{dx}\int_1^x(t^2-2t)dt=x^2-2x$

(2) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+2}(3t^2-3)dt=\{3(x+2)^2-3\}-(3x^2-3)$

$=3x^2+12x+9-3x^2+3$

$=12x+12$

05 답 (1) 3 (2) 12

(1) $F'(x)=x^2+2x+3$이라고 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^h(x^2+2x+3)dx=\lim_{h\to0}\frac{F(h)-F(0)}{h}$

$=F'(0)=3$

(2) $F'(x)=(x+2)(x+3)$이라고 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(t+2)(t+3)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=F'(1)=3\times4=12$

필수유형 01 251쪽

01-1 답 (1) 24 (2) -8 (3) $\frac{1}{5}$

해결전략 | 주어진 식을 간단히 정리한 다음 적분한다.

STEP 1 정적분 계산하기

(1) $\int_{-1}^{3}(x+1)(x^2-x+1)dx$

$=\int_{-1}^{3}(x^3+1)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_{-1}^{3}$

$=\left(\frac{81}{4}+3\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right)=24$

(2) $\int_0^1 9(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)dx$

$=\int_0^1 9(x^4-1)(x^4+1)dx=\int_0^1 9(x^8-1)dx$

$=\int_0^1(9x^8-9)dx$

$=\left[x^9-9x\right]_0^1$

$=1-9=-8$

(3) $\int_0^1(1-2t)^4dt=\left[\frac{1}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(1-2t)^5\right]_0^1$

$=\left[-\frac{1}{10}(1-2t)^5\right]_0^1$

$=\frac{1}{10}-\left(-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{5}$

01-2 답 2

해결전략 | 정적분을 계산하여 a에 대한 방정식을 세워 해결한다.

STEP 1 정적분 계산하기

$\int_0^a(3x^2-4)dx=\left[x^3-4x\right]_0^a=a^3-4a$

STEP 2 양수 a의 값 구하기

즉, $a^3-4a=0$이므로

$a(a+2)(a-2)=0$

이때 $a>0$이므로 $a=2$

01-3 답 14

해결전략 | 정적분의 정의를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

STEP 1 정적분 계산하기

$\int_1^4\{3f'(x)-4x\}dx=\left[3f(x)-2x^2\right]_1^4$

$=\{3f(4)-32\}-\{3f(1)-2\}$

$=3f(4)-36\ (\because f(1)=2)$

STEP 2 $f(4)$의 값 구하기

즉, $3f(4)-36=6$이므로 $3f(4)=42$

$\therefore f(4)=14$

01-4 답 200

해결전략 | 정적분을 계산하여 n에 대한 방정식을 세워 해결한다.

STEP 1 정적분 계산하기

$\int_0^1(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$

$$=\left[x+x^2+x^3+\cdots+x^n\right]_0^1$$

$$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}=n$$

STEP 2 n의 값 구하기

정적분의 값이 200이므로

$n=200$

01-5 답 $\frac{3}{8}$

해결전략 | $f(x)$와 $f(1)$의 값을 주어진 식에 대입하여 k의 값을 구한다.

STEP 1 정적분 계산하기

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(2x^3-8kx)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-4kx^2\right]_0^1=\frac{1}{2}-4k$$

STEP 2 k의 값 구하기

이때 $f(1)=2-8k$이므로 주어진 식은

$\frac{1}{2}-4k=2-8k,\ 4k=\frac{3}{2}$

$\therefore\ k=\frac{3}{8}$

01-6 답 $\frac{7}{24}$

해결전략 | $f(x)$를 주어진 식에 대입하여 정적분을 계산한 다음 a의 값을 구한다.

STEP 1 $\int_0^2\{f(x)\}^2dx$의 값 구하기

$$\int_0^2\{f(x)\}^2dx=\int_0^2(2x-1)^2dx$$

$$=\int_0^2(4x^2-4x+1)dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}x^3-2x^2+x\right]_0^2$$

$$=\frac{32}{3}-8+2=\frac{14}{3}$$

STEP 2 $\int_0^2 2f(x)dx$의 값 구하기

$$\int_0^2 2f(x)dx=\int_0^2(4x-2)dx$$

$$=\left[2x^2-2x\right]_0^2$$

$$=8-4=4$$

STEP 3 a의 값 구하기

따라서 주어진 등식에서

$\frac{14}{3}=a\times4^2 \qquad \therefore\ a=\frac{7}{24}$

필수유형 02 253쪽

02-1 답 3

해결전략 | 정적분을 계산한 다음 방정식을 세워 양수 k의 값을 구한다.

STEP 1 정적분 계산하기

$$\int_{-1}^2(3x^2-2kx+4)dx=\left[x^3-kx^2+4x\right]_{-1}^2$$

$$=(16-4k)-(-5-k)$$

$$=-3k+21$$

STEP 2 방정식 풀기

즉, $-3k+21=k^2+3$이므로

$k^2+3k-18=0$

$(k+6)(k-3)=0$

이때 $k>0$이므로 $k=3$

02-2 답 6

해결전략 | 정적분을 계산한 다음 이차부등식을 세워 푼다.

STEP 1 정적분 계산하기

$f(x)=-4x^3+2kx$이므로

$$\int_0^1(-4x^3+2kx)dx=\left[-x^4+kx^2\right]_0^1$$

$$=-1+k$$

STEP 2 이차부등식 풀기

즉, $-1+k\geq k^2-7$이므로

$k^2-k-6\leq0,\ (k+2)(k-3)\leq0$

$\therefore\ -2\leq k\leq3$

STEP 3 정수 k의 개수 구하기

따라서 구하는 정수 k의 개수는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 6이다.

02-3 답 $f(x)=x^3-x^2+5x+4$

해결전략 | 적분상수 C를 포함한 $f(x)$를 주어진 등식에 대입하여 정적분을 계산한다.

STEP 1 부정적분을 하여 적분상수 C를 포함한 $f(x)$ 구하기

$f'(x)=3x^2-2x+5$이므로

$$f(x)=\int(3x^2-2x+5)dx=x^3-x^2+5x+C$$

STEP 2 $f(x)$를 주어진 등식에 대입하여 정적분 계산하기

$$\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_{-1}^0(x^3-x^2+5x+C)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+Cx\right]_{-1}^0$$

$$=-\frac{37}{12}+C$$

STEP 3 $f(x)$ 구하기

즉, $-\frac{37}{12}+C=\frac{11}{12}$이므로 $C=4$

$\therefore f(x)=x^3-x^2+5x+4$

> 풍쌤의 비법
>
> **접선의 기울기**
>
> 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기 ➡ $f'(x)$

02-4 답 11

해결전략 | 정적분을 계산하여 구한 이차식을 완전제곱식으로 변형하여 최솟값을 구한다.

STEP 1 정적분 계산하기

$$\int_{-4}^{k}(4x+6)dx=\Big[2x^2+6x\Big]_{-4}^{k}$$
$$=2k^2+6k-8$$

STEP 2 완전제곱식으로 변형하여 최소가 되는 경우 찾기

$2k^2+6k-8=2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{2}$이므로 $k=-\frac{3}{2}$일 때

최솟값 $-\frac{25}{2}$를 갖는다.

STEP 3 $m-n$의 값 구하기

따라서 $m=-\frac{3}{2}$, $n=-\frac{25}{2}$이므로

$m-n=-\frac{3}{2}-\left(-\frac{25}{2}\right)=11$

02-5 답 9

해결전략 | 정적분을 계산하여 구한 이차식을 완전제곱식으로 변형하여 최솟값을 구한다.

STEP 1 정적분 계산하기

$$\int_{1}^{2}(3x^2-2ax+a^2-4)dx$$
$$=\Big[x^3-ax^2+a^2x-4x\Big]_{1}^{2}$$
$$=(8-4a+2a^2-8)-(1-a+a^2-4)$$
$$=a^2-3a+3$$

STEP 2 완전제곱식으로 변형하여 최소가 되는 경우 찾기

$f(a)=a^2-3a+3=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

즉, $f(a)$는 $a=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

STEP 3 $8mn$의 값 구하기

따라서 $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{3}{4}$이므로

$8mn=8\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}=9$

02-6 답 8

해결전략 | 조건 (가)와 (나)를 만족시키는 경우를 찾아 식을 세우고 a, b의 값을 구한다.

STEP 1 미분계수의 정의를 이용하여 a, b의 관계식 구하기

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)=-4$$

$\therefore f'(1)=-8$

$f'(x)=2ax+b$이므로 $2a+b=-8$ …… ㉠

STEP 2 정적분을 계산하여 a, b의 관계식 구하기

조건 (나)에서

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(ax^2+bx)dx$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=-\frac{10}{3}$$

$\therefore 2a+3b=-20$ …… ㉡

STEP 3 $f(-2)$의 값 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-6$

따라서 $f(x)=-x^2-6x$이므로

$f(-2)=-4+12=8$

> 풍쌤의 비법
>
> 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=b$ (b는 실수) ➡ $f'(a)=b$

필수유형 03 255쪽

03-1 답 198

해결전략 | 적분변수를 통일시켜 하나의 정적분으로 나타낸 다음 인수분해를 이용하여 정적분을 계산하기 편한 식으로 간단히 한다.

STEP 1 적분변수를 통일시켜 하나의 정적분으로 나타내기

$$\int_0^9\frac{x^3}{x+2}dx+\int_0^9\frac{8}{y+2}dy$$
$$=\int_0^9\frac{x^3}{x+2}dx+\int_0^9\frac{8}{x+2}dx$$
$$=\int_0^9\frac{x^3+8}{x+2}dx=\int_0^9\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$$
$$=\int_0^9(x^2-2x+4)dx$$

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_0^9 (x^2-2x+4)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x\right]_0^9$$
$$=243-81+36=198$$

03-2 답 8

해결전략 | 적분 구간을 같게 만들어 하나의 정적분으로 나타내어 계산한다.

STEP 1 적분 구간을 같게 만들어 하나의 정적분으로 나타내기

$$\int_0^2 (2x^2+1)dx+2\int_0^2 (x-x^2)dx-\int_2^0 1dx$$
$$=\int_0^2 (2x^2+1)dx+\int_0^2 (2x-2x^2)dx+\int_0^2 1dx$$
$$=\int_0^2 (2x^2+1+2x-2x^2+1)dx$$
$$=\int_0^2 (2x+2)dx$$

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_0^2 (2x+2)dx=\left[x^2+2x\right]_0^2$$
$$=4+4=8$$

03-3 답 10

해결전략 | 적분 구간을 같게 만들어 하나의 정적분으로 나타낸 다음 k에 대한 방정식을 세워 푼다.

STEP 1 적분 구간을 같게 만들어 하나의 정적분으로 나타내기

$$\int_0^2 (x^2+4x+k)dx-2\int_2^0 (x^2-3x)dx$$
$$=\int_0^2 (x^2+4x+k)dx+\int_0^2 (2x^2-6x)dx$$
$$=\int_0^2 \{(x^2+4x+k)+(2x^2-6x)\}dx$$
$$=\int_0^2 (3x^2-2x+k)dx$$

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_0^2 (3x^2-2x+k)dx=\left[x^3-x^2+kx\right]_0^2$$
$$=4+2k$$

STEP 3 k의 값 구하기

즉, $4+2k=24$이므로

$2k=20$ $\therefore k=10$

03-4 답 4

해결전략 | 하나의 정적분으로 나타내어 계산한 다음 최소가 되는 상수 k의 값을 구한다.

STEP 1 하나의 정적분으로 나타내기

$$2\int_1^k (x-2)dx-\int_1^k 4dx=\int_1^k (2x-4)dx-\int_1^k 4dx$$
$$=\int_1^k \{(2x-4)-4\}dx$$
$$=\int_1^k (2x-8)dx$$

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_1^k (2x-8)dx=\left[x^2-8x\right]_1^k=k^2-8k+7$$

STEP 3 k의 값 구하기

$k^2-8k+7=(k-4)^2-9$이므로 $k=4$일 때 최솟값을 갖는다.

03-5 답 10

해결전략 | 적분 구간을 같게 만들어 하나의 정적분으로 나타내어 계산한 다음 최솟값을 구한다.

STEP 1 적분 구간을 같게 만들어 하나의 정적분으로 나타내기

$$\int_1^3 (x+k)^2dx+\int_3^1 (4-2x^2)dx$$
$$=\int_1^3 (x^2+2kx+k^2)dx-\int_1^3 (4-2x^2)dx$$
$$=\int_1^3 \{(x^2+2kx+k^2)-(4-2x^2)\}dx$$
$$=\int_1^3 (3x^2+2kx+k^2-4)dx$$

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_1^3 (3x^2+2kx+k^2-4)dx$$
$$=\left[x^3+kx^2+(k^2-4)x\right]_1^3$$
$$=(3k^2+9k+15)-(k^2+k-3)$$
$$=2k^2+8k+18$$

STEP 3 최솟값 구하기

$2k^2+8k+18=2(k+2)^2+10$이므로 $k=-2$일 때 최솟값 10을 갖는다.

03-6 답 23

해결전략 | 주어진 조건을 이용할 수 있도록 식을 나누어 적분한다.

STEP 1 $\int_1^2 f(x)dx$의 값 구하기

$\int_2^1 f(x)dx=3$에서 $\int_1^2 f(x)dx=-3$

STEP 2 $\int_1^2 \{f(x)-2\}^2dx$의 값 구하기

$$\therefore \int_1^2 \{f(x)-2\}^2dx$$
$$=\int_1^2 [\{f(x)\}^2-4f(x)+4]dx$$

$$=\int_1^2\{f(x)\}^2dx-4\int_1^2 f(x)dx+\int_1^2 4dx$$
$$=7-4\times(-3)+\Big[4x\Big]_1^2$$
$$=7+12+(8-4)=23$$

필수유형 04 257쪽

04-1 답 (1) 224 (2) -23 (3) $-\frac{65}{3}$

해결전략 | 적분 구간을 합쳐서 하나로 나타낸 다음 계산한다.

(1) $\int_{-1}^2(5x^4-6x+1)dx+\int_2^3(5y^4-6y+1)dy$
$=\int_{-1}^2(5x^4-6x+1)dx+\int_2^3(5x^4-6x+1)dx$
$=\int_{-1}^3(5x^4-6x+1)dx$
$=\Big[x^5-3x^2+x\Big]_{-1}^3$
$=(243-27+3)-(-1-3-1)=224$

(2) $\int_{-2}^{-1}(x-1)(3x+1)dx-\int_{-3}^{-1}(x-1)(3x+1)dx$
$=\int_{-2}^{-1}(x-1)(3x+1)dx+\int_{-1}^{-3}(x-1)(3x+1)dx$
$=\int_{-2}^{-3}(x-1)(3x+1)dx=\int_{-2}^{-3}(3x^2-2x-1)dx$
$=\Big[x^3-x^2-x\Big]_{-2}^{-3}$
$=(-27-9+3)-(-8-4+2)=-23$

(3) $\int_{-2}^3(-x^2+4)dx+\int_3^5(-x^2+4)dx-\int_{-2}^0(-x^2+4)dx$
$=\int_0^5(-x^2+4)dx$
$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+4x\Big]_0^5$
$=-\frac{125}{3}+20=-\frac{65}{3}$

04-2 답 -10

해결전략 | 정적분의 성질을 이용하여 하나의 정적분으로 나타낸 다음 계산한다.

STEP 1 하나의 정적분으로 나타내기

$\int_0^4 f(x)dx-\int_2^8 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx$
$=\int_0^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx-\int_2^8 f(x)dx$
$=\int_0^2 f(x)dx$

STEP 2 정적분 계산하기

$\therefore\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(2x^3-3x^2-5)dx$
$=\Big[\frac{1}{2}x^4-x^3-5x\Big]_0^2$
$=8-8-10=-10$

04-3 답 18

해결전략 | 정적분의 성질을 이용하여 하나의 정적분으로 나타낸다.

STEP 1 하나의 정적분으로 나타내기

$\int_0^3(x+1)^2dx-\int_{-1}^3(x-1)^2dx+\int_{-1}^0(x-1)^2dx$
$=\int_0^3(x+1)^2dx-\int_{-1}^3(x-1)^2dx-\int_0^{-1}(x-1)^2dx$
$=\int_0^3(x+1)^2dx-\int_0^3(x-1)^2dx$
$=\int_0^3(x^2+2x+1-x^2+2x-1)dx$
$=\int_0^3 4x\,dx$

STEP 2 정적분 계산하기

$\therefore\int_0^3 4x\,dx=\Big[2x^2\Big]_0^3=18$

04-4 답 2800

해결전략 | 정적분의 성질을 이용하여 하나의 정적분으로 나타낸다.

STEP 1 하나의 정적분으로 나타내기

$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_9^{10} f(x)dx$
$=\int_0^{10} f(x)dx$

STEP 2 정적분 계산하기

$f(x)=x^3+6x$이므로
$\int_0^{10} f(x)dx=\int_0^{10}(x^3+6x)dx$
$=\Big[\frac{1}{4}x^4+3x^2\Big]_0^{10}=2800$

04-5 답 5

해결전략 | 주어진 조건을 이용할 수 있도록 $\int_3^5 f(x)dx$의

적분 구간을 나누어 계산한다.

$$\int_3^5 f(x)dx$$
$$=\int_3^{-2} f(x)dx+\int_{-2}^5 f(x)dx$$
$$=-\int_{-2}^3 f(x)dx$$
$$+\left\{\int_{-2}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx\right\}$$
$$=-6+(3+5+3)=5$$

04-6 답 8

해결전략 I 주어진 등식을 이용하여 $\int_0^2 f(x)dx$의 값을 구한 다음 $f(x)=3x^2+ax+b$로 놓고 $\int_0^2 f(x)dx$, $\int_{-2}^0 f(x)dx$에 대입하여 2개의 식을 세워 a, b의 값을 구한다.

STEP 1 $\int_0^2 f(x)dx$의 값 구하기

$$\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$$

이때 $\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$$
$$\therefore \int_0^2 f(x)dx=0$$

STEP 2 $\int_0^2 f(x)dx=0$임을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기

즉, $\int_{-2}^2 f(x)dx=0$, $\int_0^2 f(x)dx=0$, $\int_{-2}^0 f(x)dx=0$

이므로

$f(x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (3x^2+ax+b)dx$$
$$=\left[x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^2$$
$$=8+2a+2b=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

STEP 3 $\int_{-2}^0 f(x)dx=0$임을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기

$$\int_{-2}^0 f(x)dx=\int_{-2}^0 (3x^2+ax+b)dx$$
$$=\left[x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{-2}^0$$
$$=8-2a+2b=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

STEP 4 $f(2)$의 값 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-4$

따라서 $f(x)=3x^2-4$이므로

$f(2)=12-4=8$

필수유형 05 259쪽

05-1 답 $\frac{37}{3}$

해결전략 I $x=1$을 기준으로 적분 구간을 나누어 정적분을 계산한다.

STEP 1 $x=1$을 기준으로 적분 구간 나누기

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\int_0^1 (x^2+2)dx+\int_1^3 (2x+1)dx$$

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_0^1 (x^2+2)dx+\int_1^3 (2x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1+\left[x^2+x\right]_1^3$$
$$=\frac{7}{3}+(12-2)=\frac{37}{3}$$

05-2 답 -19

해결전략 I $xf(x-1)$을 구한 다음 적분 구간을 나누어 정적분을 계산한다.

STEP 1 $xf(x-1)$ 구하기

$$f(x-1)=\begin{cases}6(x-1)-2 & (x-1<0)\\ -2 & (x-1\geq 0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}6x-8 & (x<1)\\ -2 & (x\geq 1)\end{cases}$$

이므로

$$xf(x-1)=\begin{cases}x(6x-8) & (x<1)\\ -2x & (x\geq 1)\end{cases}=\begin{cases}6x^2-8x & (x<1)\\ -2x & (x\geq 1)\end{cases}$$

STEP 2 정적분 계산하기

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4 (-2)dx=\left[-2x\right]_0^4=-8$$
$$\int_{-1}^4 xf(x-1)dx=\int_{-1}^1 (6x^2-8x)dx+\int_1^4 (-2x)dx$$
$$=\left[2x^3-4x^2\right]_{-1}^1+\left[-x^2\right]_1^4$$
$$=(-2+6)+(-16+1)=-11$$
$$\therefore \int_0^4 f(x)dx+\int_{-1}^4 xf(x-1)dx=-8-11=-19$$

풍쌤의 비법

함수 $f(x)$가 $x=0$을 기준으로 함수식이 달라지므로 함수 $f(x-1)$은 $x-1=0$, 즉 $x=1$을 기준으로 함수식이 달라짐에 유의한다.

05-3 답 -6

해결전략 | $x=1$을 기준으로 적분 구간을 나누어 정적분을 계산한다.

$$f(x)=\begin{cases}(-x+1)(3x+1) & (x<1)\\ (x-1)(3x+1) & (x\geq 1)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-3x^2+2x+1 & (x<1)\\ 3x^2-2x-1 & (x\geq 1)\end{cases}$$

이므로

$$\int_{-2}^{2}f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-3x^2+2x+1)dx+\int_{1}^{2}(3x^2-2x-1)dx$$
$$=\Big[-x^3+x^2+x\Big]_{-2}^{1}+\Big[x^3-x^2-x\Big]_{1}^{2}$$
$$=-9+3=-6$$

05-4 답 35

해결전략 | $x=1$을 기준으로 적분 구간을 나누어 정적분을 계산한다.

STEP 1 적분 구간을 나누어 정적분 계산하기

$$\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^2 xf(x)dx$$
$$=\int_0^1 x(x^2-1)dx+\int_1^2 x(x-1)dx$$
$$=\int_0^1 (x^3-x)dx+\int_1^2 (x^2-x)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2$$
$$=-\frac{1}{4}+\Big(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\Big)=\frac{7}{12}$$

STEP 2 $60k$의 값 구하기

따라서 $k=\frac{7}{12}$이므로

$$60k=60\times\frac{7}{12}=35$$

05-5 답 14

해결전략 | 그래프를 보고 $f(x)$를 구한 다음 구간에 따라 정적분을 계산한다.

STEP 1 그래프를 보고 $f(x)$ 구하기

$$f(x)=\begin{cases}8 & (x\leq 0)\\ -4x+8 & (x\geq 0)\end{cases}$$

STEP 2 적분 구간을 나누어 정적분 계산하기

$$\therefore \int_{-1}^{3}f(x)dx=\int_{-1}^{0}8dx+\int_{0}^{3}(-4x+8)dx$$
$$=\Big[8x\Big]_{-1}^{0}+\Big[-2x^2+8x\Big]_{0}^{3}$$
$$=8+6=14$$

05-6 답 3

해결전략 | $x=2$를 기준으로 구간을 나누어 정적분을 계산한다.

STEP 1 적분 구간을 나누어 정적분 계산하기

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^2(3x^2-4)dx+\int_2^a 4xdx$$
$$=\Big[x^3-4x\Big]_0^2+\Big[2x^2\Big]_2^a$$
$$=0+(2a^2-8)=2a^2-8$$

STEP 2 a의 값 구하기

즉, $2a^2-8=10$이므로

$a^2=9$ $\quad\therefore a=3\ (\because a>2)$

필수유형 06 261쪽

06-1 답 10

해결전략 | 절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 $x=3$을 기준으로 적분 구간을 나누어 정적분을 계산한다.

STEP 1 $|x-3|$을 구간을 나누어 나타내기

$$|x-3|=\begin{cases}-x+3 & (x<3)\\ x-3 & (x\geq 3)\end{cases}$$

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_1^4(x+|x-3|)dx$$
$$=\int_1^3\{x+(-x+3)\}dx+\int_3^4\{x+(x-3)\}dx$$
$$=\int_1^3 3dx+\int_3^4(2x-3)dx$$
$$=\Big[3x\Big]_1^3+\Big[x^2-3x\Big]_3^4$$
$$=(9-3)+(4-0)=10$$

06-2 답 3

해결전략 | $x=0$을 기준으로 적분 구간을 나누어 정적분을 계산한 다음 a에 대한 방정식을 세워 푼다.

STEP 1 $|x|$를 구간을 나누어 나타내기

$$|x|=\begin{cases}-x & (x<0)\\ x & (x\geq 0)\end{cases}$$

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_{-2}^{a}(2|x|-3)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(-2x-3)dx+\int_{0}^{a}(2x-3)dx$$
$$=\Big[-x^2-3x\Big]_{-2}^{0}+\Big[x^2-3x\Big]_{0}^{a}$$
$$=-2+(a^2-3a)$$
$$=a^2-3a-2$$

STEP 3 a의 값 구하기

즉, $a^2-3a-2=-2$이므로

$a^2-3a=0$, $a(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

06-3 답 $\frac{5}{2}$

해결전략 | 절댓값 기호가 없는 식으로 나타낸 다음 적분 구간을 나누어 정적분을 계산한다.

STEP 1 $|x^2-1|$을 구간을 나누어 나타내기

$$|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ -x^2+1 & (-1<x<1)\end{cases}$$

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_{-1}^{2}\frac{|x^2-1|}{x+1}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\frac{-x^2+1}{x+1}dx+\int_{1}^{2}\frac{x^2-1}{x+1}dx$$
$$=-\int_{-1}^{1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx+\int_{1}^{2}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx$$
$$=-\int_{-1}^{1}(x-1)dx+\int_{1}^{2}(x-1)dx$$
$$=-\Big[\frac{1}{2}x^2-x\Big]_{-1}^{1}+\Big[\frac{1}{2}x^2-x\Big]_{1}^{2}$$
$$=-\Big(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\Big)+\Big(0+\frac{1}{2}\Big)=\frac{5}{2}$$

06-4 답 10

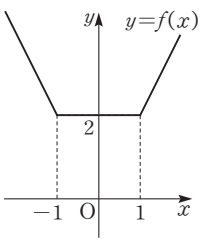
해결전략 | 먼저 절댓값 기호 안의 식이 0이 되게 하는 $x=-1$, $x=1$을 기준으로 구간을 나누어 $f(x)$를 구하고 그래프를 그린다. 그런 다음 $f(x)$의 최솟값 a를 구해 정적분을 계산한다.

STEP 1 구간을 나누어 $f(x)$의 식 구하기

$f(x)=|1+x|+|1-x|$

$$=\begin{cases}-(1+x)+(1-x) & (x<-1)\\ (1+x)+(1-x) & (-1\le x<1)\\ (1+x)-(1-x) & (x\ge 1)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-2x & (x<-1)\\ 2 & (-1\le x<1)\\ 2x & (x\ge 1)\end{cases}$$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



STEP 2 a의 값 구하기

따라서 함수 $f(x)$는 $-1\le x\le 1$에서 최솟값 2를 가지므로 $a=2$

STEP 3 $\int_{-2}^{a}f(x)dx$의 값 구하기

$$\therefore \int_{-2}^{a}f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(-2x)dx+\int_{-1}^{1}2dx+\int_{1}^{2}2xdx$$
$$=\Big[-x^2\Big]_{-2}^{-1}+\Big[2x\Big]_{-1}^{1}+\Big[x^2\Big]_{1}^{2}$$
$$=(-1+4)+(2+2)+(4-1)=10$$

06-5 답 7

해결전략 | 먼저 절댓값 기호 안의 식이 0이 되게 하는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$을 기준으로 구간을 나누어 $f(x)$를 구하고 그래프를 그린다. 그런 다음 $f(x)$의 최솟값을 구해 정적분을 계산한다.

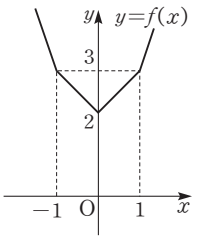
STEP 1 구간을 나누어 $f(x)$ 구하기

$f(x)=|x+1|+|x-1|+|x|$

$$=\begin{cases}-(x+1)-(x-1)-x & (x<-1)\\ (x+1)-(x-1)-x & (-1\le x<0)\\ (x+1)-(x-1)+x & (0\le x<1)\\ (x+1)+(x-1)+x & (x\ge 1)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-3x & (x<-1)\\ -x+2 & (-1\le x<0)\\ x+2 & (0\le x<1)\\ 3x & (x\ge 1)\end{cases}$$

STEP 2 a, b의 값 구하기

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 2를 가지므로

$a=0$, $b=2$

STEP 3 $\int_a^b(x)dx$의 값 구하기

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^1(x+2)dx+\int_1^2 3x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1+\left[\frac{3}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=\frac{5}{2}+\left(6-\frac{3}{2}\right)=7$$

06-6 답 11

해결전략 | $x=n$을 기준으로 구간을 나누어 정적분을 계산하여 $f(n)$을 구한 다음 주어진 식의 값을 구한다.

STEP 1 $x=n$을 기준으로 구간을 나누어 정적분 계산하기

$|x-n|=\begin{cases}-x+n & (x<n)\\ x-n & (x\geq n)\end{cases}$이므로

$$f(n)=\int_n^{2n}|x-n|dx$$
$$=\int_0^n(-x+n)dx+\int_n^{2n}(x-n)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+nx\right]_0^n+\left[\frac{1}{2}x^2-nx\right]_n^{2n}$$
$$=\frac{n^2}{2}+\left(0+\frac{n^2}{2}\right)=n^2$$

STEP 2 식의 값 구하기

$$\therefore \frac{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)}{5}$$
$$=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5}$$
$$=\frac{55}{5}=11$$

◉→ 다른 풀이

STEP 2 식의 값 구하기

$$\therefore \frac{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)}{5}$$
$$=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{5}\times\frac{5\times6\times11}{6}=11$$

필수유형 07 263쪽

07-1 답 40

해결전략 | 우함수와 기함수로 피적분함수를 나눈 다음 정적분을 계산한다.

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+40x^{39})dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(1+3x^2+\cdots+39x^{38})dx$$
$$+\int_{-1}^{1}(2x+4x^3+\cdots+40x^{39})dx$$
$$=2\int_0^1(1+3x^2+\cdots+39x^{38})dx$$
$$=2\left[x+x^3+\cdots+x^{39}\right]_0^1=2\times20=40$$

07-2 답 25

해결전략 | 우함수와 기함수를 이용하여 적분 식을 간단히 하여 정적분을 계산한 다음 a에 대한 방정식을 세워 푼다.

STEP 1 정적분 계산하기

$$\int_{-a}^{a}(3x^2+2x)dx=2\int_0^a 3x^2dx$$
$$=2\left[x^3\right]_0^a=2a^3$$

STEP 2 a의 값 구하기

즉, $2a^3=\frac{1}{4}$이므로

$$a^3=\frac{1}{8}\qquad\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a\text{는 실수})$$

$$\therefore 50a=50\times\frac{1}{2}=25$$

07-3 답 2

해결전략 | 우함수와 기함수를 이용하여 적분 식을 간단히 하여 정적분을 계산한 다음 a에 대한 방정식을 세워 푼다.

STEP 1 정적분 계산하기

$$\int_{-a}^{a}(3x^2-x-2)dx=2\int_0^a(3x^2-2)dx$$
$$=2\left[x^3-2x\right]_0^a=2(a^3-2a)$$

STEP 2 a의 값 구하기

즉, $2(a^3-2a)=10-a$이므로

$2a^3-3a-10=0$, $(a-2)(2a^2+4a+5)=0$

$\therefore a=2\ (\because a\text{는 실수})$

07-4 답 $-\frac{3}{2}$

해결전략 | 우함수와 기함수를 이용하여 적분 식을 간단히 하여 정적분을 계산한 다음 a에 대한 방정식을 세워 푼다.

STEP 1 정적분 계산하기

$$\int_{-a}^{a}(-2x^3+3x^2+5x+a)dx=2\int_{0}^{a}(3x^2+a)dx$$
$$=2\Big[x^3+ax\Big]_0^a$$
$$=2a^3+2a^2$$

STEP 2 실수 a의 값 구하기

즉, $2a^3+2a^2=(a+1)^2$이므로

$2a^3+a^2-2a-1=0$

$(a+1)(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

STEP 3 모든 음의 실수 a의 값의 합 구하기

따라서 구하는 모든 음의 실수 a의 값의 합은

$-1+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

07-5 답 -4

해결전략 | 우함수와 기함수로 피적분함수를 나눈 다음 정적분을 계산한다.

STEP 1 우함수, 기함수 판단하기

$f(x)=x^3|x|$, $g(x)=x|x|$, $h(x)=|x|$로 놓으면

$f(-x)=(-x)^3|-x|=-x^3|x|=-f(x)$,

$g(-x)=(-x)|-x|=-x|x|=-g(x)$,

$h(-x)=|-x|=|x|=h(x)$

이므로 $x^3|x|$, $x|x|$는 기함수, $|x|$는 우함수이다.

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_{-2}^{2}|x|(x^3+2x-1)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(x^3|x|+2x|x|-|x|)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-|x|)dx=2\int_{0}^{2}(-x)dx$$
$$=\Big[-x^2\Big]_0^2=-4$$

07-6 답 3

해결전략 | $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓고 주어진 조건에 대입하여 a, b의 값을 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라고 하면

$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=6$에서

$$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}x(ax+b)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)dx=2a\int_{0}^{1}x^2dx$$
$$=2a\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1=2a\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}a$$

즉, $\frac{2}{3}a=6$이므로 $a=9$

STEP 2 b의 값 구하기

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=-4$에서

$$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2(ax+b)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2)dx=2b\int_{0}^{1}x^2dx$$
$$=2b\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1=2b\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}b$$

즉, $\frac{2}{3}b=-4$이므로 $b=-6$

STEP 3 $f(1)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=9x-6$이므로

$f(1)=9-6=3$

필수유형 08 265쪽

08-1 답 20

해결전략 | $f(x)$, $g(x)$가 우함수인지 기함수인지 판단하고, 우함수와 기함수의 성질과 주어진 조건을 이용하여 정적분을 계산한다.

STEP 1 $f(x)$, $g(x)$가 우함수인지 기함수인지 확인하기

$f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수,

$g(x)=-g(-x)$에서 $g(-x)=-g(x)$이므로

$g(x)$는 기함수이다.

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_{-2}^{2}\{2f(x)-3g(x)\}dx$$
$$=2\int_{-2}^{2}f(x)dx-3\int_{-2}^{2}g(x)dx$$
$$=4\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=4\times5=20$$

08-2 답 8

해결전략 | $x^3f(x)$, $xf(x)$가 우함수인지 기함수인지 판단하고, 우함수와 기함수의 성질과 주어진 조건을 이용하여 정적

분을 계산한다.

STEP 1 $x^3f(x)$, $xf(x)$가 우함수인지 기함수인지 확인하기

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$g(x)=xf(x)$, $h(x)=x^3f(x)$로 놓으면

$g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$

$h(-x)=(-x)^3f(-x)=-x^3f(x)=-h(x)$

따라서 $xf(x)$, $x^3f(x)$는 모두 기함수이다.

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_{-1}^{1}(4x^3-x+1)f(x)dx$$
$$=4\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx-\int_{-1}^{1}xf(x)dx+\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}f(x)dx$$
$$=2\times4=8$$

> **풍쌤의 비법**
>
> **우함수, 기함수의 곱**
>
> 위의 문제에서 다항함수 $f(x)$는 우함수이므로 상수항 또는 차수가 짝수인 항의 합으로 이루어진 함수이다. 따라서 $x^3f(x)$는 차수가 3+(짝수), 즉 홀수인 항의 합으로 이루어진 함수이므로 기함수이고, $xf(x)$도 마찬가지로 기함수이다.

08-3 답 6

해결전략 | $f(x)$가 우함수임을 이용하여 $\int_0^6 f(x)dx$의 값을 구한 다음 $\int_3^6 f(x)dx$의 값을 구한다.

STEP 1 $\int_0^6 f(x)dx$의 값 구하기

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-6}^{6}f(x)dx=2\int_{0}^{6}f(x)dx=18$$
$$\therefore \int_{0}^{6}f(x)dx=9$$

STEP 2 $\int_3^6 f(x)dx$의 값 구하기

$$\therefore \int_{3}^{6}f(x)dx=\int_{0}^{6}f(x)dx-\int_{0}^{3}f(x)dx$$
$$=9-3=6$$

08-4 답 −32

해결전략 | $f(x)$, $xf(x)$, $x^2f(x)$가 우함수인지 기함수인지 확인한 후 정적분을 계산한다.

STEP 1 $f(x)$가 우함수인지 기함수인지 확인하기

$f(-x)+f(x)=0$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다.

STEP 2 $f(x)$가 곱해진 함수가 우함수인지 기함수인지 확인하기

$g(x)=xf(x)$, $h(x)=x^2f(x)$로 놓으면

$g(-x)=-xf(-x)=xf(x)=g(x)$,

$h(-x)=(-x)^2f(-x)=-x^2f(x)=-h(x)$

이므로 $xf(x)$는 우함수, $x^2f(x)$는 기함수이다.

STEP 3 정적분 계산하기

$$\therefore \int_{-1}^{1}(3x^2-2x+9)f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}3x^2f(x)dx-\int_{-1}^{1}2xf(x)dx+\int_{-1}^{1}9f(x)dx$$
$$=0-2\int_{-1}^{1}xf(x)dx+0=-4\int_{0}^{1}xf(x)dx$$
$$=-4\times8=-32$$

08-5 답 1

해결전략 | $f(x)$, $xf(x)$가 우함수인지 기함수인지 확인한 후 정적분을 계산하여 a에 대한 방정식을 세워 푼다.

STEP 1 $f(x)$, $xf(x)$가 우함수인지 기함수인지 확인하기

$f(x)-f(-x)=0$에서 $f(-x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이고, $xf(x)$는 기함수이다.

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_{-5}^{5}(x-a)f(x)dx=\int_{-5}^{5}xf(x)dx-\int_{-5}^{5}af(x)dx$$
$$=0-2a\int_{0}^{5}f(x)dx$$
$$=-2a\times(-3)=6a$$

STEP 3 a의 값 구하기

즉, $6a=6$이므로 $a=1$

08-6 답 3

해결전략 | $f(x)$가 기함수인 것과 정적분의 성질을 이용하여 $\int_{-2}^{3}f(x)dx$를 $\int_{0}^{2}f(x)dx$, $\int_{0}^{3}f(x)dx$를 사용하여 나타낸다.

STEP 1 $f(x)$가 우함수인지 기함수인지 확인하기

$f(x)=-f(-x)$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다.

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_{-2}^{3}f(x)dx=\int_{-2}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx$$
$$=\int_{2}^{3}f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{3}f(x)dx-\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=k^2-(-1)=k^2+1$$

STEP 3 모든 상수 k의 값의 합 구하기

이때 $\int_{-2}^{3} f(x)dx=3k-1$이므로

$k^2+1=3k-1$, $k^2-3k+2=0$

$(k-1)(k-2)=0$, $k=1$ 또는 $k=2$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $1+2=3$

필수유형 09 267쪽

09-1 답 $\frac{14}{3}$

해결전략 | 먼저 조건 (가)를 이용하여 $\int_0^1 f(x)dx$의 값을 구한 다음 주기함수의 성질을 이용하여 $\int_{-7}^{7} f(x)dx$를 $\int_0^1 f(x)dx$로 나타내어 그 값을 구한다.

STEP 1 $\int_0^1 f(x)dx$의 값 구하기

조건 (가)에서

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

STEP 2 $\int_{-7}^{7} f(x)dx$의 값 구하기

조건 (나)에서 $f(x)$는 주기가 1인 주기함수이므로

$$\int_{-7}^{-6} f(x)dx=\int_{-6}^{-5} f(x)dx=\cdots=\int_6^7 f(x)dx$$

$$\therefore \int_{-7}^{7} f(x)dx=14\int_0^1 f(x)dx=14\times\frac{1}{3}=\frac{14}{3}$$

09-2 답 28

해결전략 | 대칭함수와 주기함수의 성질을 이용하여 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

STEP 1 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에서 대칭임을 이용하기

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx$$

STEP 2 주기함수의 성질을 이용하여 정적분 계산하기

조건 (나)에서 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx=\int_4^5 f(x)dx,$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx=\int_3^4 f(x)dx$$

STEP 3 $\int_2^5 f(x)dx$의 값 구하기

조건 (다)에서 $\int_0^3 f(x)dx=12$이므로

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$$

$$=3\int_0^1 f(x)dx=12$$

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx=4$$

$$\therefore \int_{-2}^{5} f(x)dx=7\int_0^1 f(x)dx=7\times4=28$$

09-3 답 40

해결전략 | 대칭함수와 주기함수의 성질을 이용하여 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

STEP 1 $\int_0^2 f(x)dx$의 값 구하기

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=4$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx=2\times4=8$$

STEP 2 $f(x)$가 주기함수임을 알기

조건 (나)에서 $x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이므로

$f(t)=f(t+2)$

즉, $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이다.

STEP 3 $\int_{-4}^{6} f(x)dx$의 값 구하기

$$\therefore \int_{-4}^{6} f(x)dx$$

$$=\int_{-4}^{-2} f(x)dx+\int_{-2}^{0} f(x)dx+\cdots+\int_4^6 f(x)dx$$

$$=5\int_0^2 f(x)dx=5\times8=40$$

풍쌤의 비법

위 문제의 $\int_{-4}^{6} f(x)dx$에서 적분 구간의 길이는 $6-(-4)=10$이고 $f(x)$는 주기가 2인 함수이므로 $\int_{-4}^{6} f(x)dx$는 주기가 5번 반복된다. 이때 주기함수에서 한 주기의 정적분의 값은 항상 같으므로

$$\int_{-4}^{6} f(x)dx=5\int_0^2 f(x)dx$$

09-4 답 40

해결전략 | 함수 $f(x)$가 우함수이고 주기함수임을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

STEP 1 $f(x)$가 우함수임을 이용하여 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$의 값 구하기

조건 (가)에서 $f(x)$는 우함수이므로 $xf(x)$는 기함수이다.

조건 (다)에서

$$\int_{-1}^{1}(2x+3)f(x)dx=\int_{-1}^{1}2xf(x)dx+\int_{-1}^{1}3f(x)dx$$
$$=0+3\int_{-1}^{1}f(x)dx=15$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}f(x)dx=5$$

STEP 2 $\int_{-6}^{10} f(x)dx$의 값 구하기

조건 (나)에서 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx=5$$

$$\therefore \int_{-6}^{10}f(x)dx$$
$$=\int_{-6}^{-4}f(x)dx+\int_{-4}^{-2}f(x)dx+\int_{-2}^{0}f(x)dx$$
$$+\cdots+\int_{8}^{10}f(x)dx$$
$$=8\int_{0}^{2}f(x)dx=8\times5=40$$

필수유형 10 269쪽

10-1 답 $\frac{13}{6}$

해결전략 I $\int_{0}^{1} tf(t)dt$가 상수임을 이용하여 $f(x)=x^2-2x+k$ (k는 상수)로 놓고 해결한다.

STEP 1 $\int_{0}^{1} tf(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓기

$$\int_{0}^{1}tf(t)dt=k \text{ } (k\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

라고 하면 $f(x)=x^2-2x+k$

STEP 2 k의 값 구하기

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_{0}^{1}t(t^2-2t+k)dt=\int_{0}^{1}(t^3-2t^2+kt)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1$$
$$=-\frac{5}{12}+\frac{k}{2}=k$$

$$\therefore k=-\frac{5}{6}$$

STEP 3 $f(3)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^2-2x-\frac{5}{6}$이므로

$$f(3)=9-6-\frac{5}{6}=\frac{13}{6}$$

풍쌤의 비법

$f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)dt$ (a, b는 상수) 꼴에서 함수 $f(x)$ 구하는 방법

❶ $\int_a^b f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓는다.

➡ $f(x)=g(x)+k$ ····· ㉠

❷ ㉠을 $\int_a^b f(t)dt=k$에 대입한 $\int_a^b \{g(t)+k\}dt=k$를 풀어 k의 값을 구한다.

❸ k의 값을 ㉠에 대입하여 $f(x)$를 구한다.

10-2 답 -7

해결전략 I $\int_{0}^{3} tf'(t)dt$가 상수임을 이용하여 $f(x)=-x^2+6x+k$ (k는 상수)로 놓고 해결한다.

STEP 1 $\int_{0}^{3} tf'(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓고 $f'(x)$ 구하기

$$\int_{0}^{3}tf'(t)dt=k \text{ } (k\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

라고 하면 $f(x)=-x^2+6x+k$

$$\therefore f'(x)=-2x+6$$

STEP 2 k의 값 구하기

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_{0}^{3}t(-2t+6)dt=\int_{0}^{3}(-2t^2+6t)dt$$
$$=\left[-\frac{2}{3}t^3+3t^2\right]_0^3=9=k$$

$$\therefore k=9$$

STEP 3 $f(-2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=-x^2+6x+9$이므로

$$f(-2)=-4-12+9=-7$$

10-3 답 16

해결전략 I $\int_{0}^{1} f(t)dt$가 상수임을 이용하여 $f(x)=12x^2+2kx+k$ (k는 상수)로 놓고 해결한다.

STEP 1 $\int_{0}^{1} f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓기

$$f(x)=12x^2+\int_{0}^{1}(2x+1)f(t)dt$$
$$=12x^2+2x\int_{0}^{1}f(t)dt+\int_{0}^{1}f(t)dt$$

이때 $\int_{0}^{1}f(t)dt=k$ (k는 상수) ····· ㉠

라고 하면 $f(x)=12x^2+2kx+k$

STEP 2 k의 값 구하기

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 (12t^2+2kt+k)dt=\Big[4t^3+kt^2+kt\Big]_0^1$$
$$=4+2k=k$$

$\therefore k=-4$

STEP 3 $f(-1)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=12x^2-8x-4$이므로

$f(-1)=12+8-4=16$

10-4 답 −8

해결전략 | 정적분의 성질을 이용하여 $f(x)$의 식을 간단히 정리한 다음 $\int_2^4 f(t)dt$가 상수임을 이용하여 b의 값을 구한다.

STEP 1 $f(x)$의 식을 간단히 정리하기

$$f(x)=2x+\int_{-1}^2 f(t)dt-\int_{-1}^4 f(t)dt$$
$$=2x-\left\{\int_2^{-1} f(t)dt+\int_{-1}^4 f(t)dt\right\}$$
$$=2x-\int_2^4 f(t)dt$$

STEP 2 a, b의 값 판단하기

$2x-\int_2^4 f(t)dt=ax+b$이고

$\int_2^4 f(t)dt$는 상수이므로

$a=2$, $b=-\int_2^4 f(t)dt$ …… ㉠

STEP 3 ab의 값 구하기

㉠에 $f(x)=2x+b$를 대입하면

$$b=-\int_2^4 (2t+b)dt$$
$$=-\Big[t^2+bt\Big]_2^4$$
$$=-\{(16+4b)-(4+2b)\}=-12-2b$$

이므로 $3b=-12$ $\therefore b=-4$

$\therefore ab=2\times(-4)=-8$

10-5 답 15

해결전략 | $\int_0^2 f(t)dt$가 상수임을 이용하여 $f(x)=12x^2-2x+k$ (k는 상수)로 놓고 k의 값을 구한 다음 부등식의 해를 구한다.

STEP 1 $\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓기

$f(x)=12x^2-2x+\int_0^2 f(t)dt$에서

$\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

라고 하면 $f(x)=12x^2-2x+k$

STEP 2 k의 값 구하기

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^2 (12t^2-2t+k)dt=\Big[4t^3-t^2+kt\Big]_0^2$$
$$=28+2k=k$$

$\therefore k=-28$

STEP 3 부등식의 해 구하기

즉, $f(x)=12x^2-2x-28$이므로

부등식 $f(x)<g(x)$에서

$12x^2-2x-28<11x^2+3x-22$

$x^2-5x-6<0$, $(x+1)(x-6)<0$

$\therefore -1<x<6$

STEP 4 모든 자연수 x의 값의 합 구하기

따라서 부등식 $f(x)<g(x)$를 만족시키는 모든 자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$

10-6 답 34

해결전략 | $\int_0^1 \{f(t)+g(t)\}dt$, $\int_0^1 \{f(t)-g(t)\}dt$의 값이 상수임을 이용하여 미지수로 놓고 해결한다.

STEP 1 $f(x)$, $g(x)$ 정하기

$\int_0^1 \{f(t)+g(t)\}dt=a$,

$\int_0^1 \{f(t)-g(t)\}dt=b$ (a, b는 상수)

라고 하면

$f(x)=3x^2+a$, $g(x)=4x^3+b$

STEP 2 b의 값 구하기

$$\int_0^1 \{f(t)+g(t)\}dt=\int_0^1 \{4t^3+3t^2+(a+b)\}dt$$
$$=\Big[t^4+t^3+(a+b)t\Big]_0^1=2+a+b$$

즉, $2+a+b=a$이므로 $b=-2$

STEP 3 a의 값 구하기

$$\int_0^1 \{f(t)-g(t)\}dt=\int_0^1 \{-4t^3+3t^2+(a-b)\}dt$$
$$=\Big[-t^4+t^3+(a-b)t\Big]_0^1$$
$$=a-b$$

즉, $a-b=b$이므로 $a=2b=2\times(-2)=-4$

STEP 4 $f(-1)g(-2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=3x^2-4$, $g(x)=4x^3-2$이므로

$f(-1)g(-2)=(-1)\times(-34)=34$

필수유형 11 271쪽

11-1 답 -9

해결전략 | 적분변수와 상수로 구분하여 좌변의 적분 식을 분리한 다음 양변을 x에 대하여 미분한다.

STEP 1 적분 식 분리하기

$\int_0^x (x-t)f'(t)dt=x^4-2x^3$에서

$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=x^4-2x^3$

STEP 2 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)-f(0)$ 구하기

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=4x^3-6x^2$

$\int_0^x f'(t)dt=4x^3-6x^2$, $\left[f(t)\right]_0^x=4x^3-6x^2$

$\therefore f(x)-f(0)=4x^3-6x^2$

STEP 3 $f(1)$의 값 구하기

이때 $f(0)=-7$이므로

$f(x)=4x^3-6x^2-7$

$\therefore f(1)=4-6-7=-9$

11-2 답 2

해결전략 | $\int_a^a g(x)dx=0$, $\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt=g(x)$임을 이용한다.

STEP 1 $f(-2)$의 값 구하기

$f(x)=\int_{-2}^x (t^2+t)dt$의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f(-2)=0$

STEP 2 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\int_{-2}^x (t^2+t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+x$

STEP 3 $f(-2)+f'(-2)$의 값 구하기

따라서 $f'(-2)=4-2=2$이므로

$f(-2)+f'(-2)=0+2=2$

11-3 답 2

해결전략 | 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하여 a의 값을 구한 다음 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$\int_1^x f(t)dt=x^3+ax^2-3x+1$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a-3+1 \quad \therefore a=1$

STEP 2 $f(a)$의 값 구하기

$\int_1^x f(t)dt=x^3+x^2-3x+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+2x-3$

$\therefore f(a)=f(1)=3+2-3=2$

11-4 답 4

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 다음 정적분을 계산한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\int_x^{x+1}(t-1)^3dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^3-(x-1)^3=x^3-(x^3-3x^2+3x-1)$

$=3x^2-3x+1$

STEP 2 $\int_0^2 f'(x)dx$의 값 구하기

$\therefore \int_0^2 f'(x)dx=\int_0^2 (3x^2-3x+1)dx$

$=\left[x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right]_0^2=4$

11-5 답 4

해결전략 | $f(x)=ax+b$로 놓고 대입한 다음 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f(x)=ax+b$로 놓고 대입하기

$f(x)=ax+b$(a, b는 상수, $a\neq 0$)라고 하면

$(f\circ f)(x)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

$(f\circ f)(x)=\int_0^x f(t)dt+x^2-4x-5$에서

$a^2x+ab+b=\int_0^x f(t)dt+x^2-4x-5$

STEP 2 a, b의 값 구하기

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$a^2=f(x)+2x-4$

$a^2=ax+b+2x-4$

$(a+2)x-a^2+b-4=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$a+2=0$, $-a^2+b-4=0$

$\therefore a=-2$, $b=8$

STEP 3 $f(2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=-2x+8$이므로

$f(2)=-4+8=4$

11-6 답 1

해결전략 | $\int_a^a g(x)dx=0$, $\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt=g(x)$임을 이용한다.

STEP 1 $f(1)$의 값 구하기

$xf(x)=x^4-x^2+\int_1^x f(t)dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1-1+0=0$ ····· ㉠

STEP 2 $f'(x)$ 구하기

$xf(x)=x^4-x^2+\int_1^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=4x^3-2x+f(x)$

$xf'(x)=4x^3-2x$

$\therefore f'(x)=4x^2-2$

STEP 3 $f(x)$ 구하기

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^2-2)dx=\frac{4}{3}x^3-2x+C$

이고 ㉠에서 $f(1)=0$이므로

$\frac{4}{3}-2+C=0$ $\therefore C=\frac{2}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{4}{3}x^3-2x+\frac{2}{3}$

STEP 4 a의 값 구하기

$f(a)=0$에서

$\frac{4}{3}a^3-2a+\frac{2}{3}=0$, $2a^3-3a+1=0$

$(a-1)(2a^2+2a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a$는 정수)

필수유형 12 273쪽

12-1 답 −6

해결전략 | 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극값을 가질 조건이 $f'(k)=0$임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\int_1^x(t^2+at+8)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+ax+8$

STEP 2 a의 값 구하기

이때 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=0$

즉, $4+2a+8=0$이므로 $a=-6$

12-2 답 $\frac{16}{3}$

해결전략 | 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극값을 가질 조건이 $f'(k)=0$임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$를 구하여 극댓값, 극솟값을 갖는 x의 값 구하기

$f(x)=\int_0^x(t-2)(t-a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-2)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=a$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖고 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

STEP 2 a의 값 구하기

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $\frac{20}{3}$을 가지므로

$f(2)=\int_0^2(t-2)(t-a)dt$

$=\int_0^2\{t^2-(a+2)t+2a\}dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a+2}{2}t^2+2at\right]_0^2$

$=\frac{6a-4}{3}=\frac{20}{3}$

$6a-4=20$ $\therefore a=4$

STEP 3 극솟값 구하기

따라서 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 가지므로 구하는 극솟값은

$f(4)=\int_0^4(t-2)(t-4)dt$

$=\int_0^4(t^2-6t+8)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^4=\frac{16}{3}$

12-3 답 19

해결전략 | 함수 $f(x)$의 극대 · 극소를 판단하여 a, b의 값을 구한다.

STEP 1 $f(x)$의 극대 · 극소 판단하기

$f(x)=\int_0^x(t^2+2t-3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	-3	···	1	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

STEP 2 a의 값 구하기

따라서 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 a를 가지므로

$$a=f(-3)=\int_0^{-3}(t^2+2t-3)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+t^2-3t\right]_0^{-3}=9$$

STEP 3 $a-6b$의 값 구하기

또, $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 b를 가지므로

$$b=f(1)=\int_0^{1}(t^2+2t-3)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+t^2-3t\right]_0^{1}=-\frac{5}{3}$$

$$\therefore a-6b=9-6\times\left(-\frac{5}{3}\right)=19$$

12-4 답 54

해결전략 | 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극값 s를 가지면 $f(k)=s$, $f'(k)=0$임을 이용하여 a, b에 대한 두 식을 세워 a, b의 값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\int_0^x(-3t^2-at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=-3x^2-ax+b$

STEP 2 $f(x)$가 $x=-3$에서 극솟값 -27을 갖는 조건 알기

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극솟값 -27을 가지므로

$f(-3)=-27$, $f'(-3)=0$

STEP 3 a, b에 대한 식 세우기

$f(-3)=-27$에서

$$f(-3)=\int_0^{-3}(-3t^2-at+b)dt$$

$$=\left[-t^3-\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^{-3}$$

$$=27-\frac{9}{2}a-3b=-27$$

$\therefore 3a+2b=36$ …… ㉠

$f'(-3)=0$에서 $-27+3a+b=0$

$\therefore 3a+b=27$ …… ㉡

STEP 4 a, b의 값 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=9$

$\therefore ab=6\times9=54$

12-5 답 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

해결전략 | 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가질 조건이 (극댓값)×(극솟값)<0임을 이용하여 해결한다.

STEP 1 $F'(x)$ 구하기

사차함수 $F(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $F'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)=x^3-3x+4a$

STEP 2 $f(x)$가 극댓값, 극솟값을 갖는 x의 값 구하기

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=1$에서 극소이다.

STEP 3 a의 값의 범위 구하기

즉, $f(-1)f(1)<0$이어야 하므로

$(4a+2)(4a-2)<0$, $(2a+1)(2a-1)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

풍쌤의 비법

사차함수가 극댓값 또는 극솟값을 갖거나 갖지 않을 조건

(1) 최고차항의 계수가 양수일 때 ← 항상 극솟값을 갖는다.

① 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖는다.

➡ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

② 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않는다.

➡ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는다.

(2) 최고차항의 계수가 음수일 때 ← 항상 극댓값을 갖는다.

① 사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖는다.

➡ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

② 사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않는다.

➡ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는다.

12-6 답 -4

해결전략 | $g'(x)=(x-2)f'(x)$임과 $g(x)$가 $x=0$에서만 극값을 가짐을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

STEP 1 $g'(x)$ 구하기

함수 $g(x)=\int_2^x (t-2)f'(t)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=(x-2)f'(x)$

삼차함수 $g(x)$가 $x=0$에서만 극값을 가지므로

$g'(x)=ax(x-2)^2$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

STEP 2 $f'(x)$ 구하기 → $g(x)=(x-2)\times ax(x-2)=(x-2)f'(x)$

즉, $f'(x)=ax(x-2)$이고

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$a=3$

$\therefore f'(x)=3x(x-2)$

STEP 3 $g(0)$의 값 구하기

$$\therefore g(0)=\int_2^0 3t(t-2)^2dt$$
$$=\int_2^0 (3t^3-12t^2+12t)dt$$
$$=\left[\frac{3}{4}t^4-4t^3+6t^2\right]_2^0=-4$$

필수유형 13 275쪽

13-1 답 4

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $\int_0^x f(t)dt$를 구한 다음 다시 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $\int_0^x f(t)dt$ 구하기

$\int_0^x (x-t)f(t)dt=-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2$에서

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-x^3+3x^2+x$

$\therefore \int_0^x f(t)dt=-x^3+3x^2+x$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

위 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-3x^2+6x+1$

STEP 3 $f(x)$의 최댓값 구하기

따라서 $f(x)=-3(x-1)^2+4$이므로

$f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 4를 갖는다.

13-2 답 −2

해결전략 | $f'(x)$를 구하여 먼저 극대, 극소를 판정한 다음 주어진 구간에서 최대, 최소인 경우를 찾는다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\int_{-2}^{x+1}(t^3-t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+1)^3-(x+1)$
$=x^3+3x^2+2x$
$=x(x+1)(x+2)$

STEP 2 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값 구하기

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

$-2\le x\le 0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

STEP 3 최댓값 구하기

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$f(-1)=\int_{-2}^{0}(t^3-t)dt$
$=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_{-2}^{0}=-2$

13-3 답 6

해결전략 | 주어진 구간에서 극값, 양 끝 값에서의 함숫값 중에서 최대, 최소를 판정한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\int_x^{x+1}(t^3-t+2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^3-(x+1)+2\}-(x^3-x+2)$
$=3x^2+3x=3x(x+1)$

STEP 2 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값 구하기

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

STEP 3 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$의 값 구하기

$f(-1)=\int_{-1}^{0}(t^3-t+2)dt$
$=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_{-1}^{0}=\frac{9}{4}$

$f(0)=\int_0^1(t^3-t+2)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^1=\frac{7}{4}$

$f(1)=\int_1^2(t^3-t+2)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_1^2=6-\frac{7}{4}=\frac{17}{4}$

STEP 4 $M+m$의 값 구하기

따라서 $-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{17}{4}$, 최솟값은 $\frac{7}{4}$이다.

즉, $M=\frac{17}{4}$, $m=\frac{7}{4}$이므로

$M+m=\frac{17}{4}+\frac{7}{4}=6$

풍쌤의 비법

함수의 최대 · 최소

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

❶ 구간 $[a, b]$에서 $f(x)$의 극값을 구한다.

❷ $f(a)$, $f(b)$의 값을 구한다.

❸ 극값과 $f(a)$, $f(b)$의 값 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

13-4 답 4

해결전략 | 주어진 구간에서 극값, 양 끝 값에서의 함숫값 중에서 최대, 최소를 판정한다.

STEP 1 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값 구하기

$f(x)=\int_{-2}^x(2-|t|)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2-|x|$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0\le x\le 4$)

$0\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	⋯	2	⋯	4
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

STEP 2 최댓값 구하기

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$f(2)=\int_{-2}^2(2-|t|)dt$

$=2\int_0^2(2-|t|)dt$

$=2\int_0^2(2-t)dt$

$=2\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2$

$=2\times 2=4$

풍쌤의 비법

함수 $y=2-|t|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 우함수이다.

13-5 답 −1

해결전략 | $f(x)$의 식을 설정한 다음 주어진 식에 대입하여 $\int_0^1 f(t)dt$의 값을 먼저 구한다.

STEP 1 $\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓기

$f(x)=4x^2-6\int_0^1 xf(t)dt=4x^2-6x\int_0^1 f(t)dt$

이때 $\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) ····· ㉠

라고 하면 $f(x)=4x^2-6kx$

STEP 2 k의 값 구하기

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1(4t^2-6kt)dt=\left[\frac{4}{3}t^3-3kt^2\right]_0^1=\frac{4}{3}-3k=k$

$\therefore k=\frac{1}{3}$

STEP 3 $\frac{a}{b}$의 값 구하기

$\therefore f(x)=4x^2-2x=4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{4}$에서 최솟값 $-\frac{1}{4}$을 갖는다.

즉, $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{4}$이므로

$\frac{a}{b}=\frac{1}{4}\div\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\times(-4)=-1$

($\frac{a}{b}=a\div b$)

13-6 답 −5

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $\int_0^x f(2t)dt$를 구한 다음 다시 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $\int_0^x f(2t)dt$ 구하기

$\int_0^x(t-x)f(2t)dt=x^4-2x^3+4x^2$에서

$\int_0^x tf(2t)dt - x\int_0^x f(2t)dt = x^4 - 2x^3 + 4x^2$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(2x) - \int_0^x f(2t)dt - xf(2x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x$

$\therefore \int_0^x f(2t)dt = -4x^3 + 6x^2 - 8x$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(2x) = -12x^2 + 12x - 8$

이때 $2x = k$라고 하면 $x = \frac{1}{2}k$이므로

$f(k) = -3k^2 + 6k - 8$, 즉 $f(x) = -3x^2 + 6x - 8$

STEP 3 $f(x)$의 최댓값 구하기

따라서 $f(x) = -3x^2 + 6x - 8 = -3(x-1)^2 - 5$이므로 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 최댓값 -5를 갖는다.

필수유형 14 277쪽

14-1 답 9

해결전략 | 그래프를 이용하여 $\int_2^x f(t)dt$의 식을 구한 다음 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

주어진 그래프에 의하여

$F(x) = a(x-1)(x-2)$

$= a(x^2 - 3x + 2)$ $(a < 0)$

으로 놓으면

$\int_2^x f(t)dt = a(x^2 - 3x + 2)$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = a(2x - 3)$

STEP 2 a의 값 구하기

함수 $y = f(x)$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$3 = a(4 - 3)$ $\therefore a = 3$

STEP 3 $f(3)$의 값 구하기

따라서 $f(x) = 3(2x - 3) = 6x - 9$이므로

$f(3) = 18 - 9 = 9$

14-2 답 3

해결전략 | $g'(x)$를 구하여 $g(x)$의 극대, 극소를 판정한 다음 최소인 경우를 찾는다.

STEP 1 $g'(x)$ 구하기

주어진 그래프에 의하여

$f(x) = k(x-2)(x-6)$ $(k > 0)$으로 놓고

$g(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x) = f(x+2) - f(x)$

$= kx(x-4) - k(x-2)(x-6)$

$= k(x^2 - 4x - x^2 + 8x - 12)$

$= k(4x - 12)$

STEP 2 $g(x)$가 극값을 갖는 x의 값 구하기

$g'(x) = 0$에서 $x = 3$

함수 $g(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

STEP 3 a의 값 구하기

따라서 함수 $g(x)$는 $x = 3$에서 극소이면서 최소이므로

$a = 3$

14-3 답 -4

해결전략 | $S'(x)$를 구하여 먼저 $S(x)$의 극대, 극소를 판정한 다음 주어진 구간에서 최대, 최소인 경우를 찾는다.

STEP 1 $S(x)$가 극값을 갖는 만족시키는 x의 값 구하기

$S(x) = \int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$S'(x) = f(x)$

$S'(x) = 0$을 만족시키는 x의 값은 주어진 그래프에 의하여

$x = 1$ 또는 $x = 5$ ($\because 0 \le x \le 5$)

구간 $[0, 5]$에서 함수 $S(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5
$S'(x)$		$+$	0	$-$	0
$S(x)$		↗	극대	↘	

STEP 2 $S(0)$, $S(1)$, $S(5)$의 값 구하기

$S(0) = 0$

$S(1) = \int_0^1 f(t)dt = 1$

$S(5) = \int_0^5 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^5 f(t)dt$

$= 1 + (-6) = -5$

STEP 3 최댓값과 최솟값의 합 구하기

따라서 구간 $[0, 5]$에서 함수 $S(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 -5이므로 구하는 합은

$1 + (-5) = -4$

14-4 답 $-\frac{8}{3}$

해결전략 | $f(x)$의 식을 구하여 $F(x)$의 극대, 극소를 판정한 다음 극솟값을 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

주어진 그래프에 의하여

$f(x)=ax(x-2)$ $(a>0)$

라고 하자.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이고, $f(x)$의 최솟값이 -2이므로

$f(1)=-2$에서 $-a=-2$ $\therefore a=2$

$\therefore f(x)=2x(x-2)=2x^2-4x$

STEP 2 극솟값 구하기

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)=2x(x-2)$

$F'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $F(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(x)$	+	0	−	0	+
$F(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $F(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2(2t^2-4t)dt$

$=\left[\frac{2}{3}t^3-2t^2\right]_0^2=-\frac{8}{3}$

필수유형 15 279쪽

15-1 답 6

해결전략 | $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt=f(a)$임을 이용하여 주어진 두 극한식을 정리하고 A, B의 값을 구한다.

STEP 1 A의 값 구하기

$f(t)=5t^2-2t+3$, $F'(t)=f(t)$라고 하면

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x(5t^2-2t+3)dt$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[F(t)\right]_0^x$

$=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=f(0)=3$

$\therefore A=3$

STEP 2 B의 값 구하기

$g(t)=t^2-4$, $G'(t)=g(t)$라고 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}(t^2-4)dt=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}g(t)dt$

$=\lim_{h\to0}\frac{G(1+h)-G(1)}{h}$

$=G'(1)=g(1)=-3$

$\therefore B=-3$

STEP 3 $A-B$의 값 구하기

$\therefore A-B=3-(-3)=6$

15-2 답 $\frac{10}{3}$

해결전략 | $F'(x)=f(x)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한식을 간단히 정리한 다음 주어진 조건을 이용하여 a, b에 대한 관계식을 세운다.

STEP 1 극한식 간단히 하기

$F'(x)=f(x)$라고 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h}f(x)dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[F(x)\right]_2^{2+h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}$

$=F'(2)=f(2)$

STEP 2 주어진 조건을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기

$f(2)=4$에서

$8+4a-4+b=4$ $\therefore 4a+b=0$ ····· ㉠

또, $f(-1)=-1$에서

$-1+a+2+b=-1$ $\therefore a+b=-2$ ····· ㉡

STEP 3 a, b의 값 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{8}{3}$

$\therefore a-b=\frac{2}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{10}{3}$

15-3 답 -27

해결전략 | $f(x)=x^3-4x^2$, $F'(x)=f(x)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한식을 간단히 정리한다.

STEP 1 $f(x)=x^3-4x^2$, $F'(x)=f(x)$로 놓고 주어진 극한식 정리하기

$f(x)=x^3-4x^2$, $F'(x)=f(x)$라고 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_3^{3+3h}(x^3-4x^2)dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_3^{3+3h}f(x)dx$

$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[F(x)\right]_3^{3+3h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(3+3h)-F(3)}{h}$

$$=3\lim_{h\to0}\frac{F(3+3h)-F(3)}{3h}$$
$$=3F'(3)=3f(3)$$

STEP 2 극한값 구하기

이때 $f(x)=x^3-4x^2$이므로

$3f(3)=3\times(-9)=-27$

> 풍쌤의 비법
>
> $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면
>
> $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^{a+bh}f(x)dx$
>
> $=\lim_{h\to0}\frac{F(a+bh)-F(a)}{h}$
>
> $=\lim_{h\to0}\frac{F(a+bh)-F(a)}{bh}\times b$
>
> $=bF'(a)=bf(a)$

15-4 답 6

해결전략 | 먼저 $f'(x)$를 구한 다음 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한식을 간단히 정리한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\int_0^x(10t^2-2t+6)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=10x^2-2x+6$

STEP 2 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f'(x)$의 값 구하기

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f'(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[f(x)\Big]_0^x$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=f'(0)=6$$

15-5 답 −4

해결전략 | $f(t)=|t-6a|$, $F'(t)=f(t)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한식을 간단히 정리한 다음 a에 대한 방정식을 세워 푼다.

STEP 1 극한식 간단히 하기

$f(t)=|t-6a|$, $F'(t)=f(t)$라고 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x|t-6a|dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_0^x$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)$$
$$=|-6a|=-6a\ (\because a<0)$$

STEP 2 a의 값 구하기

즉, $-6a=2a^2-8$이므로

$2a^2+6a-8=0$, $(a+4)(a-1)=0$

$\therefore a=-4\ (\because a<0)$

15-6 답 12

해결전략 | $F'(x)=f(x)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 두 극한식을 간단히 정리하여 a, b에 대한 관계식을 세운다.

STEP 1 b의 값 구하기

$F'(x)=f(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^h f(x)dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_0^h$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(h)-F(0)}{h}$$
$$=F'(0)=f(0)=b$$

$\therefore b=2$

STEP 2 a의 값 구하기

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-3h}^{1+h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{1-3h}^{1+h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)+F(1)-F(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+3\lim_{h\to0}\frac{F(1-3h)-F(1)}{-3h}$$
$$=F'(1)+3F'(1)$$
$$=4F'(1)=4f(1)$$
$$=4(2-a+b)$$

즉, $4(2-a+b)=4$이므로

$4-a=1$ $\quad\therefore a=3$

STEP 3 $f(2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=2x^3-3x+2$이므로

$f(2)=16-6+2=12$

> 풍쌤의 비법
>
> $F(1)$의 값을 더하고 빼면 어차피 그 값은 0이고, -3을 분자, 분모에 곱하면 어차피 그 값은 1이므로 식에는 전혀 영향을 주지 않는다.

필수유형 16 281쪽

16-1 답 9

해결전략 | $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$임을 이용하여 주어진 두 극한식을 정리하고 그 합을 구한다.

STEP 1 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_x^1 f(t)dt$의 값 구하기

$F'(x)=f(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_x^1 f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^x$$
$$=-\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=-F'(1)=-f(1)$$
$$=-(-1)=1$$

STEP 2 $\lim_{x\to 2}\frac{2}{x-2}\int_2^x f(t)dt$의 값 구하기

$$\lim_{x\to 2}\frac{2}{x-2}\int_2^x f(t)dt=2\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt$$
$$=2\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_2^x$$
$$=2\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=2F'(2)=2f(2)$$
$$=2\times 4=8$$

STEP 3 극한값의 합 구하기

따라서 구하는 극한값의 합은

$1+8=9$

16-2 답 2

해결전략 | $F'(x)=f(x)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한식을 간단히 정리한 다음 a에 대한 방정식을 세워 푼다.

STEP 1 극한식 간단히 정리하기

$F'(x)=f(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2} f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\Big[F(x)\Big]_1^{x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$$
$$=2F'(1)=2f(1)=2(4-a)$$

STEP 2 a의 값 구하기

즉, $2(4-a)=4$이므로

$4-a=2 \quad \therefore a=2$

16-3 답 4

해결전략 | $F(t)=\int\{f(t)\}^2f'(t)dt$로 놓고 정적분의 정의와 미분계수의 정의를 이용하여 극한식을 간단히 한 다음 주어진 조건을 이용하여 극한값을 구한다.

STEP 1 $\int_2^x\{f(t)\}^2f'(t)dt$를 정적분의 정의를 이용하여 나타내기

$F(t)=\int\{f(t)\}^2f'(t)dt$라고 하면

$F'(t)=\{f(t)\}^2f'(t)$이므로

$$\int_2^x\{f(t)\}^2f'(t)dt=\Big[F(t)\Big]_2^x=F(x)-F(2)$$

STEP 2 극한값 구하기

$$\therefore\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x\{f(t)\}^2f'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=\{f(2)\}^2f'(2)$$
$$=1^2\times 4=4$$

16-4 답 −9

해결전략 | 먼저 $x=1$에서 극솟값을 가질 조건을 이용하여 $f(x)$를 구한 다음 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$f(x)=x^3-ax^2+x+1$이 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2-2ax+1$이므로

$3-2a+1=0 \quad \therefore a=2$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2+x+1$

STEP 2 극한값 구하기

$F'(x)=f(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x^3} f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\Big[F(t)\Big]_{-1}^{x^3}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{F(x^3)-F(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\left\{\frac{F(x^3)-F(-1)}{x^3-(-1)}\times(x^2-x+1)\right\}$$
$$=3F'(-1)=3f(-1)$$

$=3\times(-3)=-9$

16-5 답 $\frac{5}{2}$

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 연속으로 미분하여 $f(x)$를 구한 다음 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

STEP 1 적분변수와 상수를 분리하기

$\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^3-x^2-x+1$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3-x^2-x+1$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-2x-1$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2-2x-1$

위 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-2$

STEP 3 극한값 구하기

$F'(t)=f(t)$라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt&=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\Big[F(t)\Big]_2^x\\&=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{(x+2)(x-2)}\\&=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}\\&=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)\\&=\frac{1}{4}\times 10=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

16-6 답 10

해결전략 | 먼저 $g(t)=t(k-t)$, $G'(t)=g(t)$로 놓고 극한식을 간단히 하여 $f(k)$의 식을 구한다.

STEP 1 $f(k)$의 값 구하기

$g(t)=t(k-t)$, $G'(t)=g(t)$라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x t(k-t)dt&=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x g(t)dt\\&=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\Big[G(t)\Big]_2^x\\&=\lim_{x\to 2}\frac{G(x)-G(2)}{x-2}\\&=G'(2)=g(2)\\&=2(k-2)=2k-4\end{aligned}$$

$\therefore f(k)=2k-4$

STEP 2 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$의 값 구하기

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$

$=-2+0+2+4+6$

$=10$

실전 연습 문제 282~286쪽

01 66	02 ②	03 -1	04 13	05 $\frac{56}{3}$
06 5	07 4	08 $\frac{43}{2}$	09 $\frac{8}{3}$	10 18
11 ④	12 $\frac{1}{2}$	13 17	14 40	15 $\frac{16}{9}$
16 ②	17 1	18 ①	19 9	20 20
21 ⑤	22 -2	23 ①	24 40	25 7
26 -54	27 $\frac{16}{3}$	28 $\frac{8}{3}$	29 10	30 11

01

해결전략 | 식을 전개한 다음 정적분한다. 위끝과 아래끝이 같은 경우 정적분의 값은 0이다.

$$\begin{aligned}&\int_1^{-2}4(x+3)(x-2)dx+\int_2^2(2y-1)(2y+1)dy\\&=\int_1^{-2}(4x^2+4x-24)dx+0\\&=\Big[\frac{4}{3}x^3+2x^2-24x\Big]_1^{-2}\\&=\Big(-\frac{32}{3}+8+48\Big)-\Big(\frac{4}{3}+2-24\Big)=66\end{aligned}$$

02

해결전략 | 정적분을 계산하여 a에 대한 방정식을 세워 푼다.

STEP 1 정적분 계산하기

$\int_0^1(4x^3+a)dx=\Big[x^4+ax\Big]_0^1=1+a$

STEP 2 a의 값 구하기

즉, $1+a=8$이므로 $a=7$

03

해결전략 | $f(x)$를 주어진 등식에 대입하여 좌변을 적분한 다음 양변을 비교한다.

STEP 1 $f(x)$를 대입하여 적분하기

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(3x^2+4ax)dx$$
$$=\left[x^3+2ax^2\right]_0^1=1+2a \quad \cdots\cdots ❶$$

STEP 2 a의 값 구하기

이때 $f(1)=3+4a$이므로

$3+4a=1+2a$, $2a=-2$

$\therefore a=-1$ $\cdots\cdots ❷$

채점 요소	배점
❶ $f(x)$를 대입하여 정적분 계산하기	60 %
❷ a의 값 구하기	40 %

04

해결전략 | 정적분을 계산하여 구한 이차식을 완전제곱식으로 변형하여 최솟값을 구한다.

STEP 1 정적분 계산하기

$$\int_{-3}^k(6x+12)dx=\left[3x^2+12x\right]_{-3}^k=3k^2+12k+9$$

STEP 2 완전제곱식으로 변형하여 최소가 되는 경우 찾기

$3k^2+12k+9=3(k+2)^2-3$이므로 $k=-2$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

STEP 3 m^2+n^2의 값 구하기

따라서 $m=-2$, $n=-3$이므로

$m^2+n^2=4+9=13$

05

해결전략 | 적분 구간을 같게 만든 다음 하나의 정적분으로 나타내어 계산한다.

STEP 1 $A+B-C$를 하나의 정적분으로 나타내기

$$A+B-C$$
$$=\int_0^2(x^2-5x+2)dx+\int_0^2(x^2+5x)dx-\int_2^0(-x^2+6)dx$$
$$=\int_0^2(x^2-5x+2)dx+\int_0^2(x^2+5x)dx+\int_0^2(-x^2+6)dx$$
$$=\int_0^2\{(x^2-5x+2)+(x^2+5x)+(-x^2+6)\}dx$$
$$=\int_0^2(x^2+8)dx$$

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_0^2(x^2+8)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+8x\right]_0^2=\frac{8}{3}+16=\frac{56}{3}$$

06

해결전략 | $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$임을 이용하여 $\int_{-1}^0 f(x)dx$를 주어진 조건으로 나타내어 그 값을 구한다.

STEP 1 $\int_{-1}^0 f(x)dx$의 값 구하기

$$\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx+\int_4^0 f(x)dx$$
$$=2+6+(-5)=3$$

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore \int_{-1}^0\{f(x)+6x^2\}dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_{-1}^0 6x^2dx$$
$$=3+\left[2x^3\right]_{-1}^0=3+2=5$$

07

해결전략 | $\int_n^{n+4} f(x)dx$를 n에 대한 식으로 나타낸 다음 $\int_{12}^{13} f(x)dx=\int_0^{13} f(x)dx-\int_0^{12} f(x)dx$임을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

STEP 1 $\int_0^{12} f(x)dx$의 값 구하기

$$\int_0^{12} f(x)dx$$
$$=\int_0^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx+\int_8^{12} f(x)dx$$
$$=\int_0^1 x\,dx+\int_4^5 x\,dx+\int_8^9 x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^5+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_8^9$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}+\frac{17}{2}=\frac{27}{2}$$

STEP 2 $\int_0^{13} f(x)dx$의 값 구하기

또, 조건 (가)에서 $\int_0^1 f(x)dx=1$이므로

$$\int_0^{13} f(x)dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx+\int_5^9 f(x)dx+\int_9^{13} f(x)dx$$
$$=1+\int_1^2 x\,dx+\int_5^6 x\,dx+\int_9^{10} x\,dx$$
$$=1+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_5^6+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_9^{10}$$
$$=1+\frac{3}{2}+\frac{11}{2}+\frac{19}{2}=\frac{35}{2}$$

STEP 3 $\int_{12}^{13} f(x)dx$의 값 구하기

$$\therefore \int_{12}^{13} f(x)dx = \int_{0}^{13} f(x)dx - \int_{0}^{12} f(x)dx$$
$$= \frac{35}{2} - \frac{27}{2} = 4$$

08

해결전략 | 절댓값 기호가 없는 식으로 나타낸 다음 적분 구간을 나누어 정적분을 계산한다.

STEP 1 구간을 나누어 분자의 식 나타내기

$$|x^2-16| = \begin{cases} x^2-16 & (x \le -4 \text{ 또는 } x \ge 4) \\ -x^2+16 & (-4 \le x \le 4) \end{cases} \quad \cdots\cdots ❶$$

STEP 2 적분 구간을 나누어 정적분 계산하기

$$\int_{-5}^{2} \frac{|x^2-16|}{x+4} dx$$
$$= \int_{-5}^{-4} \frac{x^2-16}{x+4} dx + \int_{-4}^{2} \frac{-x^2+16}{x+4} dx$$
$$= \int_{-5}^{-4} (x-4)dx - \int_{-4}^{2} (x-4)dx \quad \cdots\cdots ❷$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_{-5}^{-4} - \left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_{-4}^{2}$$
$$= \left(24-\frac{65}{2}\right) - (-6-24) = \frac{43}{2} \quad \cdots\cdots ❸$$

채점 요소	배점
❶ 구간을 나누어 분자의 식 구하기	20 %
❷ 정적분 간단히 하기	40 %
❸ 정적분 계산하기	40 %

09

해결전략 | 합성함수를 구한 다음 절댓값 기호가 없는 식으로 나타내어 구간을 나누어 정적분을 계산한다.

STEP 1 합성함수를 구간으로 나누어 나타내기

$f(x) = |x-3|$, $g(x) = x^2+2$이므로

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+2) = |x^2-1|$$
$$= \begin{cases} x^2-1 & (x \le -1 \text{ 또는 } x \ge 1) \\ -x^2+1 & (-1 \le x \le 1) \end{cases}$$

STEP 2 적분 구간을 나누어 정적분 계산하기

$$\int_{-2}^{1} (f \circ g)(x)dx$$
$$= \int_{-2}^{-1} (x^2-1)dx + \int_{-1}^{1} (-x^2+1)dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}$$
$$= \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

10

해결전략 | $1 \le t \le x$, $x \le t \le 4$일 때로 나누어 $f(x)$를 절댓값 기호가 없는 식으로 나타낸다.

STEP 1 구간을 나누어 $f(x)$ 구하기

구간 $[1, 4]$에서

$$|t-x| = \begin{cases} -t+x & (1 \le t \le x) \\ t-x & (x \le t \le 4) \end{cases}$$이므로

$$f(x) = \int_{1}^{4} 2|t-x|dt$$
$$= 2\int_{1}^{x} (-t+x)dt + 2\int_{x}^{4} (t-x)dt$$

STEP 2 정적분을 계산하여 완전제곱식으로 변형하기

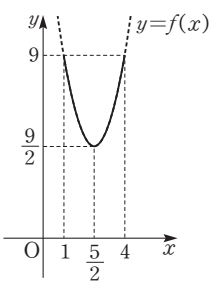
$$f(x) = 2\left[-\frac{1}{2}t^2+xt\right]_{1}^{x} + 2\left[\frac{1}{2}t^2-xt\right]_{x}^{4}$$
$$= 2\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}x^2-4x+8\right)$$
$$= 2x^2-10x+17 = 2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

STEP 3 $M+2m$의 값 구하기

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $1 \le x \le 4$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 9, 최솟값은 $\frac{9}{2}$이다.

즉, $M=9$, $m=\frac{9}{2}$이므로

$$M+2m = 9+2\times\frac{9}{2} = 18$$



11

해결전략 | 우함수와 기함수를 이용하여 정적분을 계산한다.

STEP 1 하나의 정적분으로 나타내기

$$\int_{-3}^{3} (x^3+4x^2)dx + \int_{3}^{-3} (x^3+x^2)dx$$
$$= \int_{-3}^{3} (x^3+4x^2)dx - \int_{-3}^{3} (x^3+x^2)dx$$
$$= \int_{-3}^{3} (x^3+4x^2-x^3-x^2)dx$$
$$= \int_{-3}^{3} 3x^2 dx$$
$$= 2\int_{0}^{3} 3x^2 dx$$

STEP 2 정적분 계산하기

$$\therefore 2\int_{0}^{3} 3x^2 dx = 2\left[x^3\right]_{0}^{3} = 2\times 27 = 54$$

12

해결전략 | 우함수와 기함수를 이용하여 정적분을 계산한다.

STEP 1 적분 식 간단히 정리하기

$$\int_{-a}^{a}(x^3+3x^2-9x+a)dx=2\int_{0}^{a}(3x^2+a)dx$$
$$=2\Big[x^3+ax\Big]_0^a$$
$$=2a^3+2a^2$$

STEP 2 a의 값 구하기

즉, $2a^3+2a^2=3a^2$이므로

$2a^3-a^2=0$, $a^2(2a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a\neq 0$)

13

해결전략 | 우함수와 기함수를 이용하여 정적분의 값을 구한다.

STEP 1 $f(x)$를 적분상수 C를 포함하여 나타내기

조건 (가)에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2f(x)f'(x)$

$f(x)\{1-2f'(x)\}=0$ $\therefore f'(x)=\frac{1}{2}$ ($\because f(x)\neq 0$)

따라서 $f(x)$는 일차함수이므로 $f(x)=\frac{1}{2}x+C$(C는 상수)로 놓을 수 있다.

STEP 2 C의 값 구하기

$f(x)$의 식을 조건 (나)에 대입하면

$$\int_{-2}^{2}\Big(\frac{1}{2}x+C\Big)dx=2\int_{0}^{2}Cdx$$
$$=2\Big[Cx\Big]_0^2=4C=60$$

$\therefore C=15$

STEP 3 $f(4)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x+15$이므로

$f(4)=2+15=17$

14

해결전략 | $f(x)$가 주기함수이고 우함수임을 이용하여 정적분의 값을 계산한다.

STEP 1 $\int_0^1 f(x)dx$의 값 구하기

조건 (가)에서

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{1}{3}$$

STEP 2 함수 $f(x)$의 성질 파악하기

조건 (나)에서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

또, 조건 (나)에서 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx$ $\therefore \int_0^2 f(x)dx=\frac{2}{3}$

$\therefore \int_{-60}^{-58}f(x)dx=\int_{-58}^{-56}f(x)dx=\cdots=\int_{58}^{60}f(x)dx$

STEP 3 $\int_{-60}^{60}f(x)dx$의 값 구하기

$\therefore \int_{-60}^{60}f(x)dx=60\int_0^2 f(x)dx$

$=60\times\frac{2}{3}=40$

풍쌤의 비법

주기함수에서 한 주기의 정적분의 값은 항상 같다.

위의 문제에서

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_{-1}^0 f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^1 f(x)dx$$

15

해결전략 | 적분 구간이 상수인 정적분의 값은 상수이므로 주어진 식에서 정적분의 값을 상수 a, b로 놓고 함수식을 간단히 나타낸다.

STEP 1 $\int_0^1 g(t)dt=a$, $\int_0^1 f(t)dt=b$로 놓기

$\int_0^1 g(t)dt=a$ (a는 상수) …… ㉠

$\int_0^1 f(t)dt=b$ (b는 상수) …… ㉡

라고 하면 $f(x)=x^2-a$, $g(x)=bx$

STEP 2 a, b의 값 구하기

이를 각각 ㉠, ㉡에 대입하면

$$a=\int_0^1 g(t)dt=\int_0^1 btdt=\Big[\frac{1}{2}bt^2\Big]_0^1=\frac{1}{2}b$$

$\therefore b=2a$ …… ㉢

$$b=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(t^2-a)dt$$
$$=\Big[\frac{1}{3}t^3-at\Big]_0^1=\frac{1}{3}-a$$

$\therefore a+b=\frac{1}{3}$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{9}$, $b=\frac{2}{9}$

STEP 3 $f(-1)+g(4)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^2-\frac{1}{9}$, $g(x)=\frac{2}{9}x$이므로

$f(-1)+g(4)=\frac{8}{9}+\frac{8}{9}=\frac{16}{9}$

16

해결전략 | 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\int_1^x(t-2)(t-3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-2)(x-3)$

STEP 2 $f'(4)$의 값 구하기

$\therefore f'(4)=(4-2)\times(4-3)=2$

17

해결전략 | 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$를 구한 다음 정적분을 계산한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$\int_1^x f(t)dt=3x^2-x-2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-1$

$\therefore f(x^2)=6x^2-1$

STEP 2 정적분 계산하기

$\therefore \int_0^1 f(x^2)dx=\int_0^1(6x^2-1)dx$

$=\left[2x^3-x\right]_0^1=1$

18

해결전략 | 그래프에서 증가, 감소를 확인하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 유추한다.

STEP 1 함수 $y=f(x)$의 그래프 유추하기

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

이므로 $f(x)$는 $F(x)$의 도함수이다.

그런데 주어진 함수 $y=F(x)$의 그래프에서

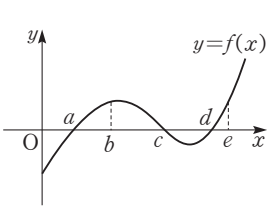
$0\le x\le a$에서 감소하므로 $f(x)\le 0$

$a\le x\le c$에서 증가하므로 $f(x)\ge 0$

$c\le x\le d$에서 감소하므로 $f(x)\le 0$

$x\ge d$에서 증가하므로 $f(x)\ge 0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 주어진 x의 값에서의 $f(x)$의 부호 알기

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(a)=0$, $f(b)>0$, $f(c)=0$, $f(d)=0$, $f(e)>0$

STEP 3 보기의 참, 거짓 판단하기

ㄱ. $f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 a, c, d의 3개이다. (참)

ㄴ. $f(d)=0$이므로 $f(b)f(d)f(e)=0$ (거짓)

ㄷ. $c<x<d$일 때 $f(x)<0$이고

$x>d$일 때 $f(x)>0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

19

해결전략 | 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하여 a의 값을 구하고 적분변수와 상수로 적분 식을 분리한 다음 양변을 x에 대하여 연속으로 미분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$\int_2^x(x-t)f(t)dt=x^3+ax^2+4$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=8+4a+4 \quad \therefore a=-3$ ····· ❶

STEP 2 b의 값 구하기

$\int_2^x(x-t)f(t)dt=x^3-3x^2+4$에서

$x\int_2^x f(t)dt-\int_2^x tf(t)dt=x^3-3x^2+4$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_2^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-6x$

$\therefore \int_2^x f(t)dt=3x^2-6x$

위 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-6 \quad \therefore b=f(3)=12$ ····· ❷

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

$\therefore a+b=-3+12=9$ ····· ❸

채점 요소	배점
❶ a의 값 구하기	40 %
❷ b의 값 구하기	40 %
❸ $a+b$의 값 구하기	20 %

20

해결전략 | 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하여 a의 값을 구한 다음 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$를 구한다.

STEP 1 a의 값 구하기

$\int_a^x f(t)dt=2x^2+ax-12$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=2a^2+a^2-12$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$\int_2^x f(t)dt=2x^2+2x-12$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x+2$

STEP 3 $af(a)$의 값 구하기

따라서 $f(a)=f(2)=8+2=10$이므로

$af(a)=2\times10=20$

21

해결전략 | 먼저 주어진 등식에서 다항함수 $f(x)$의 차수를 파악한다.

STEP 1 다항함수 $f(x)$의 차수 파악하기

$f(x)$의 차수를 n($n\geq2$인 자연수)이라고 하면 주어진 등식의 좌변의 차수는 n^2, 우변의 차수는 $n+1$이므로

$n^2=n+1$ $\therefore n^2-n-1=0$

그런데 위의 식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않으므로 $f(x)$는 일차 이하의 다항식이다.

STEP 2 $f(x)=ax+b$로 놓고 주어진 등식 정리하기

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(f(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x(at+b)dt=\left[\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^x=\frac{1}{2}ax^2+bx$

즉, 주어진 등식은

$a^2x+ab+b=\frac{1}{2}ax^2+bx-2x^2+15x+5$

$\therefore a^2x+ab+b=\left(\frac{1}{2}a-2\right)x^2+(b+15)x+5$

STEP 3 a, b의 값 구하기

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$0=\frac{1}{2}a-2$, $a^2=b+15$, $ab+b=5$

$\therefore a=4$, $b=1$

STEP 4 $f(1)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=4x+1$이므로

$f(1)=4+1=5$

22

해결전략 | $f(x)$가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지는 조건을 이용하여 a의 값을 구하고 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

STEP 1 a의 값 구하기

함수 $f(x)=x^2-ax+\int_2^x g(t)dt$가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(2)=4-2a+0=0$ $\therefore a=2$

STEP 2 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$로 나타내기

따라서 $f(x)=x^2-2x+\int_2^x g(t)dt$이고 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2x-2+g(x)$ …… ㉠

한편, $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)$

STEP 3 $f'(x)$ 구하기

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)$

$=(x-2)\{2Q(x)+(x-2)Q'(x)\}$

STEP 4 나머지 구하기

따라서 $f'(2)=0$이므로 $x=2$를 ㉠에 대입하면

$0=4-2+g(2)$ $\therefore g(2)=-2$

따라서 $g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 -2이다.

> 풍쌤의 비법
>
> **인수정리와 나머지정리**
>
> (1) 다항식 $P(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어지면
> $P(a)=0$
>
> (2) 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라고 하면
> $R=P(a)$

23

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구하고, 적분 식에 $x=1$을 대입하여 $f(1)$의 값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$, $f(x)$ 구하기

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+4x$

$xf'(x)=12x^3-4x$

$f'(x)=12x^2-4$

$\therefore f(x)=\int(12x^2-4)dx=4x^3-4x+C$ …… ㉠

STEP 2 적분상수 구하기

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)=f(1)-3+2=0$ $\therefore f(1)=1$

㉠에서 $f(1)=4-4+C=1$ $\therefore C=1$

STEP 3 $f(0)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=4x^3-4x+1$이므로

$f(0)=1$

24

해결전략 | 주어진 등식에 $x=1$을 대입하여 $\int_0^1 f(t)dt$의 값을 구한 다음 식에 다시 대입한다.

STEP 1 $\int_0^1 f(t)dt$의 값 구하기

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_0^1 f(t)dt=1-2-2\int_0^1 f(t)dt$

$3\int_0^1 f(t)dt=-1$ $\therefore \int_0^1 f(t)dt=-\frac{1}{3}$

STEP 2 $f(x)$ 구하기

$\int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2+\frac{2}{3}x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x+\frac{2}{3}$

STEP 3 $60a$의 값 구하기

$f(0)=\frac{2}{3}$이므로 $a=\frac{2}{3}$

$\therefore 60a=60\times\frac{2}{3}=40$

25

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 다음 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극값을 가질 조건이 $f'(k)=0$임을 이용한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\int_x^{x+a}(t^2-3t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+a)^2-3(x+a)\}-(x^2-3x)$

$=2ax+a^2-3a$ …… ❶

STEP 2 a의 값 구하기

이때 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(-2)=0$ …… ❷

즉, $-4a+a^2-3a=0$이므로 $a^2-7a=0$

$a(a-7)=0$

$\therefore a=7$ ($\because a>0$) …… ❸

채점 요소	배점
❶ $f'(x)$ 구하기	40 %
❷ $f'(-2)=0$임을 알기	20 %
❸ a의 값 구하기	40 %

26

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 다음 극대가 되는 경우를 찾는다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\int_0^x(3t^2+at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+ax+b$

STEP 2 조건을 이용하여 a, b에 대한 관계식 세우기

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 2를 가지므로

$f'(2)=0$, $f(2)=2$

$f'(2)=12+2a+b=0$에서

$2a+b=-12$ …… ㉠

$f(2)=\int_0^2(3t^2+at+b)dt$

$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^2$

$=8+2a+2b=2$

에서 $a+b=-3$ …… ㉡

STEP 3 ab의 값 구하기

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-9$, $b=6$

$\therefore ab=(-9)\times6=-54$

27

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구하여 극대, 극소가 되는 x의 값을 구한다.

STEP 1 $f'(x)$ 구하기

$f(x)=\int_0^x(2t^3-2t^2-4t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2x^3-2x^2-4x=2x(x+1)(x-2)$

STEP 2 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값 구하기

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$-1\le x\le2$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

STEP 3 $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$의 값 구하기

$f(-1)=\int_0^{-1}(2t^3-2t^2-4t)dt$

$=-\int_{-1}^0(2t^3-2t^2-4t)dt$

$$=-\left[\frac{1}{2}t^4-\frac{2}{3}t^3-2t^2\right]_{-1}^{0}$$

$$=-\frac{5}{6}$$

$$f(0)=\int_0^0(2t^3-2t^2-4t)dt=0$$

$$f(2)=\int_0^2(2t^3-2t^2-4t)dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^4-\frac{2}{3}t^3-2t^2\right]_0^2$$

$$=-\frac{16}{3}$$

STEP 4 $M-m$의 값 구하기

따라서 $-1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값 $M=0$, 최솟값 $m=-\frac{16}{3}$이므로

$$M-m=0-\left(-\frac{16}{3}\right)=\frac{16}{3}$$

28

해결전략 | $F'(x)=f(x)$이므로 $f(x)=0$이 되는 x의 값에서 극대, 극소가 된다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점과 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$f(x)=ax(x-4)$ $(a>0)$

로 놓자.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -1)$이므로

$$-1=-4a \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x(x-4)=\frac{1}{4}x^2-x \quad \cdots\cdots ❶$$

STEP 2 $F'(x)=0$인 x의 값 구하기

$F(x)=\int_{-2}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x)=\frac{1}{4}x(x-4)$$

$F'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $F(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(x)$	+	0	−	0	+
$F(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

STEP 3 극댓값 구하기

따라서 함수 $F(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 ····· ❷

$$F(0)=\int_{-2}^{0}f(t)dt$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{4}t^2-t\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{12}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_{-2}^{0}$$

$$=-\left(-\frac{2}{3}-2\right)=\frac{8}{3} \quad \cdots\cdots ❸$$

채점 요소	배점
❶ $f(x)$ 구하기	40 %
❷ 극대인 x의 값 구하기	20 %
❸ 극댓값 구하기	40 %

29

해결전략 | $f(x)=x^2-8x+a$, $F'(x)=f(x)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한식을 간단히 정리한 다음 a에 대한 방정식을 세워 푼다.

STEP 1 극한식 간단히 정리하기

$f(x)=x^2-8x+a$, $F'(x)=f(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-2h}^{1+h}(x^2-8x+a)dx$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-2h}^{1+h}f(x)dx$$

$$=\lim_{h\to 0}\Big[F(x)\Big]_{1-2h}^{1+h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1-2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{F(1+h)-F(1)\}-\{F(1-2h)-F(1)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+2\lim_{h\to 0}\frac{F(1-2h)-F(1)}{-2h}$$

$$=F'(1)+2F'(1)$$

$$=3F'(1)=3f(1)$$

$$=3(a-7)$$

STEP 2 a의 값 구하기

즉, $3(a-7)=9$이므로

$a=10$

30

해결전략 | $F'(x)=f(x)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한식을 간단히 정리한 다음 a에 대한 방정식을 세워 푼다.

STEP 1 극한식 간단히 정리하기

$F'(t)=f(t)$라고 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^{x^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$$
$$=2F'(1)=2f(1)$$
$$=2(a-8)$$

STEP 2 a의 값 구하기

즉, $2(a-8)=6$이므로

$a-8=3 \quad \therefore a=11$

상위권 도약 문제 287~288쪽

01 ㄱ, ㄷ **02** 16 **03** 2 **04** ④ **05** 5
06 6 **07** 0 **08** ④

01

해결전략 | 함수 $f(x)$에서 적분변수와 상수를 구분하여 적분식을 정리한 다음 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

STEP 1 우변 전개하기

$f(x)=-x-\int_0^x(x-t)t^2dt$에서

$f(x)=-x-x\int_0^x t^2dt+\int_0^x t^3dt$ …… ㉠

STEP 2 양변을 x에 대하여 미분하기

ㄱ. ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-1-\int_0^x t^2dt-x^3+x^3$
$=-1-\int_0^x t^2dt$

$\therefore f'(0)=-1-\int_0^0 t^2dt=-1$ (참)

STEP 3 $f'(x)$를 구하여 $f(x)$의 증가, 감소 확인하기

ㄴ. $f'(x)=-1-\int_0^x t^2dt$
$=-1-\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^x$
$=-1-\frac{1}{3}x^3<0$ ($\because x>0$)

따라서 $x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 감소한다. (거짓)

STEP 4 최솟값 구하기

ㄷ. ㄴ에서 함수 $f(x)$는 $x>0$일 때 감소하므로 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)$이므로

$f(3)=-3-\int_0^3(3-t)t^2dt$
$=-3-\int_0^3(-t^3+3t^2)dt$
$=-3-\left[-\frac{1}{4}t^4+t^3\right]_0^3=-\frac{39}{4}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

02

해결전략 | 조건 (가)를 이용하여 조건 (나)의 식을 간단히 나타내어 $\int_0^a f(x)dx$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 조건 (가)를 이용하여 조건 (나)의 좌변 변형하기

조건 (가)에서 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

조건 (나)에서

$\int_{-a}^a\{f(x)+3x^2\}dx=2\int_0^a f(x)dx+2\int_0^2 3x^2dx$
$=2\int_0^a f(x)dx+2\left[x^3\right]_0^a$
$=2\int_0^a f(x)dx+2a^3$

STEP 2 $g(a)$ 구하기

즉, $2\int_0^a f(x)dx+2a^3=24a$이므로

$\int_0^a f(x)dx=-a^3+12a$

$f(x)$는 우함수이므로

$g(a)=\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_0^a f(x)dx=-a^3+12a$

STEP 3 극댓값 구하기

$g'(a)=-3a^2+12=-3(a+2)(a-2)$이므로

$g'(a)=0$에서 $a=-2$ 또는 $a=2$

함수 $g(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	…	-2	…	2	…
$g'(a)$	−	0	+	0	−
$g(a)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $g(a)$는 $a=2$에서 극대이므로 극댓값은

$g(2)=-8+24=16$

03

해결전략 | 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 값 $x=a$를 기준으로 구간을 나누어 나타낸다.

STEP 1 구간을 나누어 $f(x)$ 구하기

$\int_a^x f(t)dt=(x-2)|x-a|$를 절댓값 기호 안의 식의 값

이 0이 되는 값 $x=a$를 기준으로 구간을 나누어 나타내면

(i) $x<a$일 때

$$\int_a^x f(t)dt=-(x-2)(x-a)$$
$$=-x^2+(a+2)x-2a$$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-2x+a+2$

(ii) $x\geq a$일 때

$$\int_a^x f(t)dt=(x-2)(x-a)$$
$$=x^2-(a+2)x+2a$$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-a-2$

(i), (ii)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}-2x+a+2 & (x<a)\\ 2x-a-2 & (x\geq a)\end{cases}$$

STEP 2 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속임을 이용하여 a의 값 구하기

이때 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 $x=a$에서도 연속이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)$에서

$\lim_{x\to a-}(-2x+a+2)=\lim_{x\to a+}(2x-a-2)$

$-a+2=a-2,\ -2a=-4$

$\therefore a=2$

04

해결전략 | 분자, 분모 각각을 정적분으로 정의된 함수의 극한 꼴로 변형하여 간단히 한다.

STEP 1 정적분으로 정의된 함수의 극한 꼴로 변형하기

$$\lim_{b\to a}\frac{\int_{a^2}^{b^2} f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

$$=\lim_{b\to a}\frac{\frac{1}{b^2-a^2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)dx}{\frac{1}{b^2-a^2}\int_a^b f(x)dx}$$

$$=\lim_{b\to a}\left\{\frac{\frac{1}{b^2-a^2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)dx}{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}\times(b+a)\right\}$$

$$=\frac{\lim_{b\to a}\frac{1}{b^2-a^2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)dx}{\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}\times\lim_{b\to a}(b+a)$$

$$=\frac{\lim_{b\to a}\frac{1}{b^2-a^2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)dx}{\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}\times 2a \quad \cdots\cdots ㉠$$

STEP 2 분자의 식 간단히 나타내기

이때 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

㉠의 $\lim_{b\to a}\frac{1}{b^2-a^2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)dx$에서

$$\lim_{b\to a}\frac{1}{b^2-a^2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)dx=\lim_{b\to a}\frac{1}{b^2-a^2}\Big[F(x)\Big]_{a^2}^{b^2}$$
$$=\lim_{b\to a}\frac{F(b^2)-F(a^2)}{b^2-a^2}$$
$$=F'(a^2)=f(a^2)$$

STEP 3 분모의 식 간단히 나타내기

㉠의 $\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$에서

$$\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\lim_{b\to a}\frac{1}{b-a}\Big[F(x)\Big]_a^b$$
$$=\lim_{b\to a}\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$
$$=F'(a)=f(a)$$

STEP 4 주어진 식 간단히 나타내기

$$\therefore \lim_{b\to a}\frac{\int_{a^2}^{b^2} f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{f(a^2)}{f(a)}\times 2a=\frac{2af(a^2)}{f(a)}$$

05

해결전략 | 정적분의 성질을 이용하여 $f(x)$를 간단히 한 다음 양변을 x에 대하여 미분한다.

STEP 1 $f(x)$ 간단히 정리하기

조건 (나)에서

$$f(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt-\int_x^{x-1} f(t)dt-3\int_0^1 f(t)dt$$
$$=\int_x^{x+1} f(t)dt+\int_{x-1}^{x} f(t)dt-3\int_0^1 f(t)dt$$
$$=\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt-3\int_0^1 f(t)dt$$

STEP 2 $f'(x)$ 구하기

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=f(x+1)-f(x-1)$

STEP 3 조건 (가), (다)를 이용하여 $f'(1)$의 값 구하기

조건 (다)에 의하여

$f'(x)=f(x+1)-f(x-1)=f(2x)$ → $y=1$을 대입한 식이야.

$\therefore f'(1)=f(2)=5$ ($\because$ 조건 (가))

06

해결전략 | 주어진 등식의 양변을 h로 나누고 극한을 취하여 식을 간단히 정리한다.

STEP 1 양변에 극한 취하기

$g(x+h)-g(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt$에서

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

위 등식의 양변에 극한을 취하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

$\therefore g'(x)=f(x)$

STEP 2 $g(x)$ 구하기

따라서

$$g(x)=\int f(x)dx=\int (x^2-4x)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C$$

STEP 3 모든 근의 합 구하기

$g(x)=0$에서 $\frac{1}{3}x^3-2x^2+C=0$

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 근의 합은

$$\frac{2}{\frac{1}{3}}=6$$

07

해결전략 | 그래프를 보고 $f(x)$의 식을 구한 다음 두 번 적분하여 $F(x)$를 구한다.

STEP 1 $F(x)$ 구하기

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=-1$과 $x=1$에서 각각 극솟값과 극댓값을 가진다.

따라서 $f'(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a$ $(a<0)$로 놓으면

$f(x)=\int f'(x)dx$이므로

$$f(x)=\int (ax^2-a)dx=\frac{1}{3}ax^3-ax+C \quad \cdots\cdots ㉠$$

STEP 2 $F(x)$ 구하기

이때 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로

$$\frac{1}{3}a=-1 \qquad \therefore a=-3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

또, 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(0)=0$이므로 $x=0$을 ㉠에 대입하면

$$f(0)=C=0 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$f(x)=-x^3+3x$

$$\therefore F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x (-t^3+3t)dt$$

STEP 3 함수 $F(x)$의 증가, 감소 판단하기

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=-x^3+3x=-x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$F'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$ ($\because -1\le x\le 2$)

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $F(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	2
$F'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

STEP 4 최솟값 구하기

$$F(0)=\int_0^0 (-t^3+3t)dt=0$$

$$F(2)=\int_0^2 (-t^3+3t)dt=\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2\right]_0^2=2$$

따라서 함수 $F(x)$의 최솟값은 0이다.

08

해결전략 | 구간에 따라 $g(x)$를 구한 후 보기의 참, 거짓을 판단한다.

STEP 1 구간에 따라 $g(x)$ 구하기

(i) $x<1$일 때, $f(x)=-1$이므로

$$g(x)=\int_{-1}^x (t-1)f(t)dt=\int_{-1}^x (1-t)dt$$
$$=\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^x$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$$

(ii) $x\ge 1$일 때, $f(x)=-x+2$이므로

$$g(x)=\int_{-1}^1 (1-t)dt+\int_1^x (t-1)(-t+2)dt$$
$$=\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-2t\right]_1^x$$
$$=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{17}{6}$$

STEP 2 구간 $(1, 2)$에서 $g'(x)$의 부호 확인하기

ㄱ. $x\ge 1$일 때

$g'(x)=-x^2+3x-2$

$=-(x-1)(x-2)$

따라서 구간 $(1, 2)$에서 $g'(x)>0$이므로 $g(x)$는 구간 $(1, 2)$에서 증가한다. (참)

STEP 3 $g(x)$의 미분가능성 판단하기

ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 연속이고

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{17}{6}\right)-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{2x^3-9x^2+12x-5}{-6(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)^2(2x-5)}{-6(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(2x-5)}{-6}=0$$

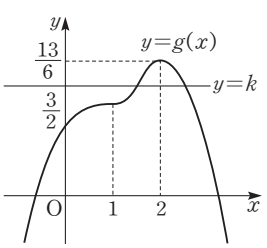
$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{\left(-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}\right)-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)^2}{-2(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x-1}{-2}=0$$

$$\therefore g'(1)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=0$$

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. (참)

STEP 4 $y=g(x)$의 그래프를 이용하여 실근 존재 판단하기

ㄷ. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k는 존재하지 않는다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 정적분의 활용

개념확인 290~291쪽

01 답 (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$

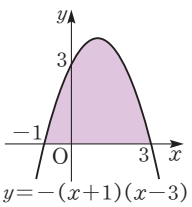
(1) 곡선 $y=-(x+1)(x-3)$과 x축의 교점의 x좌표는

$-(x+1)(x-3)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

$y=-(x+1)(x-3)$

$=-x^2+2x+3$



이고 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 $y\geq0$이므로 구하는 넓이는

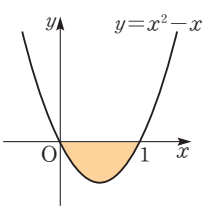
$$\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}$$
$$=9-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{32}{3}$$

(2) 곡선 $y=x^2-x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-x=0$에서 $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[0, 1]$에서 $y\leq0$이므로 구하는 넓이는



$$\int_0^1\{-(x^2-x)\}dx=-\int_0^1(x^2-x)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

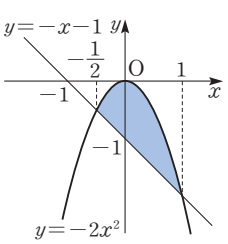
02 답 (1) $\frac{9}{8}$ (2) $\frac{9}{2}$

(1) 곡선 $y=-2x^2$과 직선 $y=-x-1$의 교점의 x좌표는 $-2x^2=-x-1$에서

$2x^2-x-1=0$

$(2x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$



닫힌구간 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$에서 $-2x^2\geq-x-1$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\{-2x^2-(-x-1)\}dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(-2x^2+x+1)dx$$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$

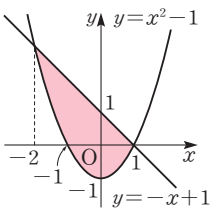
$=\frac{5}{6}-\left(-\frac{7}{24}\right)=\frac{9}{8}$

(2) 곡선 $y=x^2-1$과 직선 $y=-x+1$의 교점의 x좌표는 $x^2-1=-x+1$에서

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$



닫힌구간 $[-2, 1]$에서 $x^2-1\le -x+1$이므로 구하는 넓이는

$\int_{-2}^{1}\{(-x+1)-(x^2-1)\}dx$

$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$

$=\frac{7}{6}-\left(-\frac{10}{3}\right)=\frac{9}{2}$

03 답 (1) $\frac{8}{3}$ (2) 4

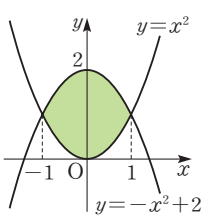
(1) 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+2$의 교점의 x좌표는

$x^2=-x^2+2$에서

$2x^2-2=0$

$2(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$



닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $x^2\le -x^2+2$이므로 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{1}\{(-x^2+2)-x^2\}dx=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx$ ← 우함수

$=4\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$

$=4\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}$

$=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

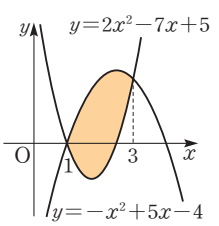
(2) 두 곡선 $y=2x^2-7x+5$, $y=-x^2+5x-4$의 교점의 x좌표는

$2x^2-7x+5=-x^2+5x-4$에서

$3x^2-12x+9=0$

$3(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$



닫힌구간 $[1, 3]$에서 $2x^2-7x+5\le -x^2+5x-4$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\int_{1}^{3}\{(-x^2+5x-4)-(2x^2-7x+5)\}dx$

$=\int_{1}^{3}(-3x^2+12x-9)dx$

$=\left[-x^3+6x^2-9x\right]_{1}^{3}$

$=0-(-4)=4$

풍쌤의 비법

두 곡선의 교점의 x좌표

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 실근과 같다.

04 답 (1) $\frac{16}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$

$t=0$일 때 위치가 0이야.

(1) $0+\int_{0}^{4}(t^2-2t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{0}^{4}=\frac{16}{3}$

(2) $\int_{1}^{2}(t^2-2t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{1}^{2}$

$=-\frac{4}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

05 답 $\frac{13}{2}$

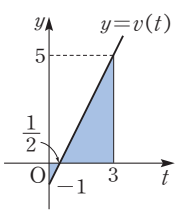
닫힌구간 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$에서 $v(t)\le 0$이고 닫힌구간 $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$에서 $v(t)\ge 0$이므로 점 P가 움직인 거리는

$\int_{0}^{3}|2t-1|dt$

$=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-2t+1)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{3}(2t-1)dt$

$=\left[-t^2+t\right]_{0}^{\frac{1}{2}}+\left[t^2-t\right]_{\frac{1}{2}}^{3}$

$=\frac{1}{4}+\frac{25}{4}=\frac{13}{2}$



필수유형 01 293쪽

01-1 답 (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) $\frac{37}{12}$ (4) 8

해결전략 | 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

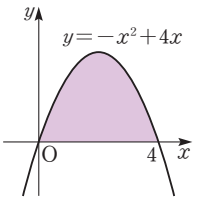
(1) STEP 1 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=-x^2+4x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+4x=0$에서

$x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[0, 4]$에서 $y\geq 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^4(-x^2+4x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

◉→ 다른 풀이

STEP 2 공식을 이용하여 넓이 구하기

구하는 넓이는

$$\frac{|-1|\times(4-0)^3}{6}=\frac{32}{3}$$

풍쌤의 비법

포물선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

포물선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a\neq 0,\ \alpha<\beta)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$$

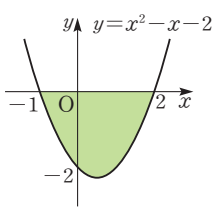
(2) STEP 1 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=x^2-x-2$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-x-2=0$에서

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $y\leq 0$이므로 구하는 넓이는

$$-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

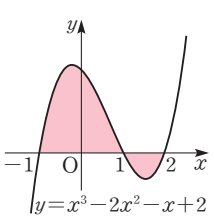
(3) STEP 1 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=x^3-2x^2-x+2$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-2x^2-x+2=0$에서

$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $y\geq 0$, 닫힌구간 $[1, 2]$에서 $y\leq 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2-x+2)dx-\int_{1}^{2}(x^3-2x^2-x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{1}^{2}$$

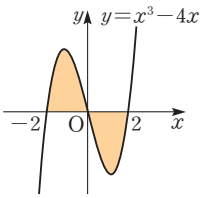
$$=\frac{8}{3}-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{37}{12}$$

(4) STEP 1 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=x^3-4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-4x=0$에서

$x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[-2, 0]$에서 $y\geq 0$이고, 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $y\leq 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx-\int_{0}^{2}(x^3-4x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=4-(-4)=8$$

01-2 답 183

해결전략 | 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

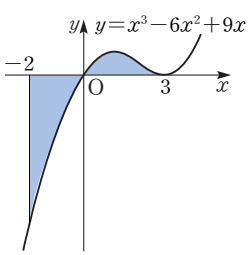
STEP 1 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=x^3-6x^2+9x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-6x^2+9x=0$에서

$x(x-3)^2=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$ (중근)



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[-2, 0]$에서 $y\leq 0$, 닫힌구간 $[0, 3]$에서 $y\geq 0$이므로 곡선 $y=x^3-6x^2+9x$와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$-\int_{-2}^{0}(x^3-6x^2+9x)dx+\int_{0}^{3}(x^3-6x^2+9x)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{3}$$

$$=38+\frac{27}{4}=\frac{179}{4}$$

STEP 3 $a+b$의 값 구하기

따라서 $a=4$, $b=179$이므로

$a+b=4+179=183$

01-3 답 $\frac{1}{2}$

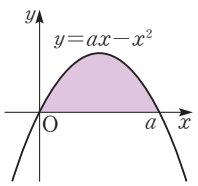
해결전략 I 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구하여 a에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=ax-x^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $ax-x^2=0$에서

$x(a-x)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$ $(a>0)$



STEP 2 넓이를 a에 대한 식으로 나타내기

닫힌구간 $[0, a]$에서 $y\geq 0$이므로 곡선 $y=ax-x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^a (ax-x^2)dx=\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$$

STEP 3 a의 값 구하기

따라서 $\frac{a^3}{6}=\frac{1}{48}$이므로

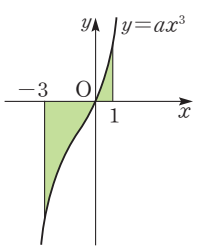
$a^3=\frac{1}{8}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a$는 양수)

01-4 답 2

해결전략 I 곡선의 개형을 그린 후 정적분을 이용하여 넓이를 구해 a에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 곡선의 개형 확인하기

$a>0$이므로 곡선 $y=ax^3$과 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=1$로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 넓이를 a에 대한 식으로 나타내기

닫힌구간 $[-3, 0]$에서 $y\leq 0$, 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $y\geq 0$이므로 곡선 $y=ax^3$과 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$-\int_{-3}^0 ax^3dx+\int_0^1 ax^3dx=-\left[\frac{a}{4}x^4\right]_{-3}^0+\left[\frac{a}{4}x^4\right]_0^1$$
$$=\frac{81}{4}a+\frac{a}{4}=\frac{41}{2}a$$

STEP 3 a의 값 구하기

따라서 $\frac{41}{2}a=41$이므로 $a=2$

01-5 답 $\frac{35}{12}$

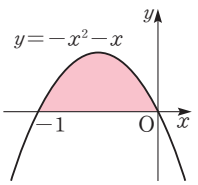
해결전략 I 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 S_1, S_2의 값을 구한다.

STEP 1 S_1의 값 구하기

곡선 $y=-x^2-x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2-x=0$에서

$x(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$



닫힌구간 $[-1, 0]$에서 $-x^2-x\geq 0$이므로

$$S_1=\int_{-1}^0 (-x^2-x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0=\frac{1}{6}$$

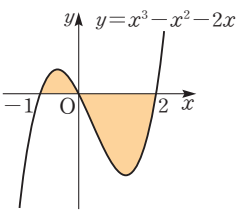
STEP 2 S_2의 값 구하기

곡선 $y=x^3-x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-x^2-2x=0$에서

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



닫힌구간 $[-1, 0]$에서 $x^3-x^2-2x\geq 0$, 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $x^3-x^2-2x\leq 0$이므로

$$S_2=\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)dx-\int_0^2 (x^3-x^2-2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{5}{12}-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{37}{12}$$

STEP 3 S_2-S_1의 값 구하기

$\therefore S_2-S_1=\frac{37}{12}-\frac{1}{6}=\frac{35}{12}$

01-6 답 $\sqrt{3}$

해결전략 I 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 S_1, S_2를 a에 대한 식으로 나타낸다. 그다음 $2S_1=S_2$에 대입하여 a의 값을 구한다.

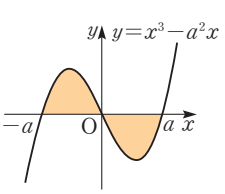
STEP 1 S_1의 값 구하기

곡선 $y=x(x+a)(x-a)$와 x축의 교점의 x좌표는

$x(x+a)(x-a)=0$에서

$x=-a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=a$

이때 $0<a<3$이므로 곡선 $y=x(x+a)(x-a)$, 즉 $y=x^3-a^2x$와 x축으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같다.



닫힌구간 $[-a, 0]$에서 $x^3-a^2x\geq 0$, 닫힌구간 $[0, a]$에서 $x^3-a^2x\leq 0$이므로

$$S_1=\int_{-a}^{0}(x^3-a^2x)dx-\int_{0}^{a}(x^3-a^2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a^2}{2}x^2\right]_{-a}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a^2}{2}x^2\right]_{0}^{a}$$

$$=\frac{a^4}{4}-\left(-\frac{a^4}{4}\right)=\frac{a^4}{2}$$

STEP 2 S_2의 값 구하기

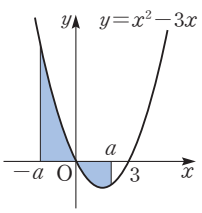
곡선 $y=x^2-3x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-3x=0$에서

$x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

이때 $0<a<3$이므로 곡선 $y=x^2-3x$와 x축 및 두 직선 $x=-a$, $x=a$로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같다.



닫힌구간 $[-a, 0]$에서 $x^2-3x\geq 0$, 닫힌구간 $[0, a]$에서 $x^2-3x\leq 0$이므로

$$S_2=\int_{-a}^{0}(x^2-3x)dx-\int_{0}^{a}(x^2-3x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-a}^{0}-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{a}$$

$$=\frac{a^3}{3}+\frac{3}{2}a^2-\left(\frac{a^3}{3}-\frac{3}{2}a^2\right)=3a^2$$

STEP 3 a의 값 구하기

이때 $2S_1=S_2$이므로

$2\times\frac{a^4}{2}=3a^2$, $a^2=3$

$\therefore a=\sqrt{3}$ ($\because 0<a<3$)

필수유형 02 295쪽

02-1 답 $\frac{8}{3}$

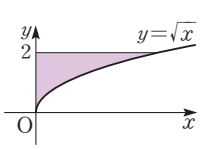
해결전략 | $x=g(y)$ 꼴로 고치고 곡선의 개형을 파악하여 넓이를 구한다.

STEP 1 $x=g(y)$ 꼴로 바꾸기

$y=\sqrt{x}$에서 $x=y^2$ ($y\geq 0$)

STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[0, 2]$에서 $y^2\geq 0$이므로 구하는 넓이는

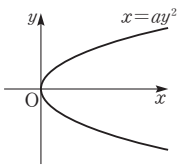


$$\int_{0}^{2}y^2dy=\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}$$

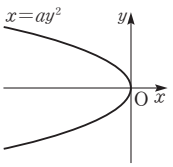
풍쌤의 비법

$x=ay^2$ 꼴의 그래프의 개형

(1) $a>0$일 때 ➡ 왼쪽으로 볼록



(2) $a<0$일 때 ➡ 오른쪽으로 볼록



02-2 답 $\frac{2}{3}$

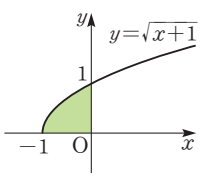
해결전략 | $x=g(y)$ 꼴로 고치고 곡선과 y축의 교점의 y좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 곡선과 y축의 교점의 y좌표 구하기

곡선 $y=\sqrt{x+1}$과 y축의 교점의 y좌표는 $x=0$일 때이므로 $y=1$

$y=\sqrt{x+1}$에서

$x=y^2-1$ ($y\geq 0$)



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[0, 1]$에서 $y^2-1\leq 0$이므로 구하는 넓이는

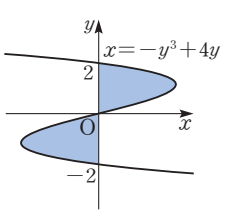
$$-\int_{0}^{1}(y^2-1)dy=-\left[\frac{1}{3}y^3-y\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}$$

02-3 답 8

해결전략 | 곡선과 y축의 교점의 y좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 곡선과 y축의 교점의 y좌표 구하기

곡선 $x=-y^3+4y$와 y축의 교점의 y좌표는 $-y^3+4y=0$에서



$y^3-4y=0$

$y(y+2)(y-2)=0$

$\therefore y=-2$ 또는 $y=0$ 또는 $y=2$

STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[-2, 0]$에서 $-y^3+4y\leq 0$, 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $-y^3+4y\geq 0$이므로 구하는 넓이는

$$-\int_{-2}^{0}(-y^3+4y)dy+\int_{0}^{2}(-y^3+4y)dy$$

$$=-\left[-\frac{1}{4}y^4+2y^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}y^4+2y^2\right]_{0}^{2}$$

$=4+4=8$

02-4 답 $\frac{8}{3}$

해결전략 | $x=g(y)$ 꼴로 고치고 곡선과 y축의 교점의 y좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

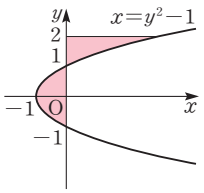
STEP 1 곡선과 y축의 교점의 y좌표 구하기

곡선 $y^2=x+1$, 즉 $x=y^2-1$과 y축의 교점의 y좌표는

$y^2-1=0$에서

$(y+1)(y-1)=0$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=1$



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $y^2-1\le 0$, 닫힌구간 $[1, 2]$에서 $y^2-1\ge 0$이므로 구하는 넓이는

$$-\int_{-1}^{1}(y^2-1)dy+\int_{1}^{2}(y^2-1)dy$$

$$=-\left[\frac{1}{3}y^3-y\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}y^3-y\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

02-5 답 0

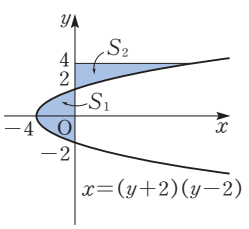
해결전략 | 곡선과 y축의 교점의 y좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 곡선과 y축의 교점의 y좌표 구하기

곡선 $x=(y+2)(y-2)$와 y축의 교점의 y좌표는

$(y+2)(y-2)=0$에서

$y=-2$ 또는 $y=2$



STEP 2 S_1의 값 구하기

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 $y^2-4\le 0$이므로

$$S_1=-\int_{-2}^{2}(y^2-4)dy=-\left[\frac{1}{3}y^3-4y\right]_{-2}^{2}$$

$$=\frac{16}{3}+\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$$

STEP 3 S_2의 값 구하기

닫힌구간 $[2, 4]$에서 $y^2-4\ge 0$이므로

$$S_2=\int_{2}^{4}(y^2-4)dy=\left[\frac{1}{3}y^3-4y\right]_{2}^{4}$$

$$=\frac{16}{3}-\left(-\frac{16}{3}\right)=\frac{32}{3}$$

STEP 4 S_2-S_1의 값 구하기

$\therefore S_2-S_1=\frac{32}{3}-\frac{32}{3}=0$

다른 풀이

STEP 2 S_2-S_1의 값 구하기

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 $y^2-4\le 0$, 닫힌구간 $[2, 4]$에서 $y^2-4\ge 0$이므로

$$S_2-S_1=\int_{2}^{4}(y^2-4)dy-\left\{-\int_{-2}^{2}(y^2-4)dy\right\}$$

$$=\int_{2}^{4}(y^2-4)dy+\int_{-2}^{2}(y^2-4)dy$$

$$=\int_{-2}^{4}(y^2-4)dy$$

$$=\left[\frac{1}{3}y^3-4y\right]_{-2}^{4}$$

$$=\frac{16}{3}-\frac{16}{3}=0$$

02-6 답 $2\sqrt{2}$

해결전략 | 곡선과 y축의 교점의 y좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구하고 a에 대한 식으로 나타낸다.

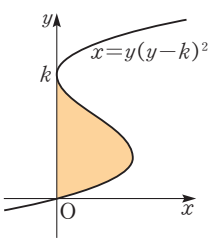
STEP 1 곡선의 개형 파악하기

곡선 $x=y(y-k)^2$과 y축의 교점의 y좌표는

$y(y-k)^2=0$에서

$y=0$ 또는 $y=k$ (중근)

이때 $k>0$이므로 곡선 $x=y(y-k)^2$과 y축으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 넓이를 k에 대한 식으로 나타내기

닫힌구간 $[0, k]$에서 $y(y-k)^2\ge 0$이므로

곡선 $x=y(y-k)^2$, 즉 $x=y^3-2ky^2+k^2y$와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{k}(y^3-2ky^2+k^2y)dy$$

$$=\left[\frac{1}{4}y^4-\frac{2k}{3}y^3+\frac{k^2}{2}y^2\right]_{0}^{k}$$

$$=\frac{1}{12}k^4$$

STEP 3 k의 값 구하기

따라서 $\frac{1}{12}k^4=\frac{16}{3}$이므로 $k^4=64$

$k=2\sqrt{2}$ ($\because k>0$)

필수유형 03 297쪽

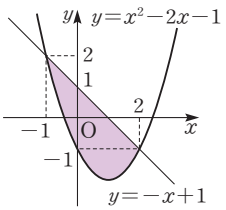
03-1 답 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{9}{2}$

해결전략 | 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구한 다음 정적분

을 이용하여 넓이를 구한다.

(1) STEP 1 곡선과 직선의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=x^2-2x-1$과 직선 $y=-x+1$의 교점의 x좌표는



$x^2-2x-1=-x+1$에서

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $x^2-2x-1\le -x+1$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{(-x+1)-(x^2-2x-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

◉→ 다른 풀이

STEP 2 공식을 이용하여 넓이 구하기

구하는 넓이는

$$\frac{|1|\times\{2-(-1)\}^3}{6}=\frac{9}{2}$$

풍쌤의 비법

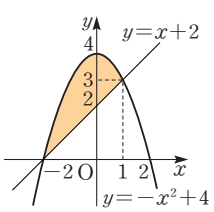
포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이

포물선 $y=ax^2+bx+c$와 직선 $y=mx+n$이 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표가 α, β $(\alpha<\beta)$일 때, 포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$$

(2) STEP 1 곡선과 직선의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는



$-x^2+4=x+2$에서

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 $-x^2+4\ge x+2$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{(-x^2+4)-(x+2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx$$

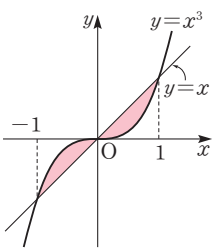
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

03-2 답 50

해결전략 | 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 곡선과 직선의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=x^3$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3=x$에서



$x^3-x=0$

$x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[-1, 0]$에서 $x^3\ge x$, 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $x^3\le x$이므로 구하는 넓이는

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(x-x^3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

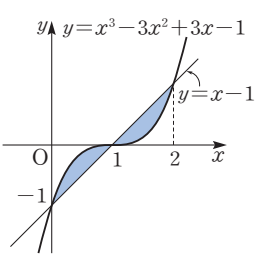
$\therefore 100S=100\times\frac{1}{2}=50$

03-3 답 $\frac{1}{2}$

해결전략 | 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 곡선과 직선의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=x^3-3x^2+3x-1$과 직선 $y=x-1$의 교점의 x좌표는



$x^3-3x^2+3x-1=x-1$에서

$x^3-3x^2+2x=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[0, 1]$에서 $x^3-3x^2+3x-1\ge x-1$, 닫힌구간 $[1, 2]$에서 $x^3-3x^2+3x-1\le x-1$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1\{(x^3-3x^2+3x-1)-(x-1)\}dx$$
$$+\int_1^2\{(x-1)-(x^3-3x^2+3x-1)\}dx$$
$$=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx+\int_1^2(-x^3+3x^2-2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

03-4 답 $\frac{9}{2}$

해결전략 | 곡선과 직선의 교점의 y좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 곡선과 직선의 교점의 y좌표 구하기

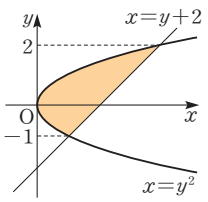
곡선 $x=y^2$과 직선 $y=x-2$, 즉 $x=y+2$의 교점의 y좌표는

$y^2=y+2$에서

$y^2-y-2=0$

$(y+1)(y-2)=0$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=2$



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 $y^2\le y+2$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^2\{(y+2)-y^2\}dy=\int_{-1}^2(-y^2+y+2)dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right]_{-1}^2=\frac{9}{2}$$

03-5 답 2

해결전략 | 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구하고 a에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 곡선과 직선의 교점의 x좌표 구하기

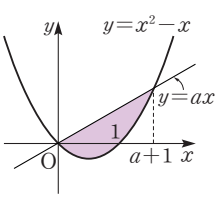
곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는

$x^2-x=ax$에서

$x^2-(a+1)x=0$

$x\{x-(a+1)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a+1$



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[0, a+1]$에서 $x^2-x\le ax$이므로 곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{a+1}\{ax-(x^2-x)\}dx$$
$$=\int_0^{a+1}\{-x^2+(a+1)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+1}{2}x^2\right]_0^{a+1}=\frac{(a+1)^3}{6}$$

STEP 3 a의 값 구하기

따라서 $\frac{(a+1)^3}{6}=\frac{9}{2}$이므로

$(a+1)^3=27$, $a+1=3$

$\therefore a=2$

03-6 답 $\frac{13}{6}$

해결전략 | 절댓값 기호 안이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 곡선과 직선의 교점의 x좌표 구하기

$$y=x|x-2|=\begin{cases}-x^2+2x & (x<2)\\ x^2-2x & (x\ge2)\end{cases}$$

$y=x|x-2|$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

(i) $x<2$일 때

$-x^2+2x=x$에서

$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

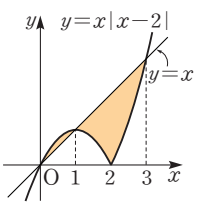
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

(ii) $x\ge2$일 때

$x^2-2x=x$에서

$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x\ge2$)



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[0, 1]$에서 $-x^2+2x\ge x$, 닫힌구간 $[1, 2]$에서 $-x^2+2x\le x$, 닫힌구간 $[2, 3]$에서 $x^2-2x\le x$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1\{(-x^2+2x)-x\}dx+\int_1^2\{x-(-x^2+2x)\}dx$$
$$+\int_2^3\{x-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_0^1(-x^2+x)dx+\int_1^2(x^2-x)dx$$
$$+\int_2^3(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_2^3$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+\frac{7}{6}=\frac{13}{6}$$

필수유형 04 299쪽

04-1 답 $\frac{1}{3}$

해결전략 | 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기

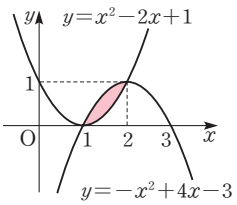
두 곡선 $y=x^2-2x+1$, $y=-x^2+4x-3$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x+1=-x^2+4x-3$에서

$2x^2-6x+4=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[1, 2]$에서 $-x^2+4x-3 \geq x^2-2x+1$이므로 구하는 넓이는

$$\int_1^2 \{(-x^2+4x-3)-(x^2-2x+1)\}dx$$

$$=\int_1^2 (-2x^2+6x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2=\frac{1}{3}$$

04-2 답 2

해결전략 | 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기

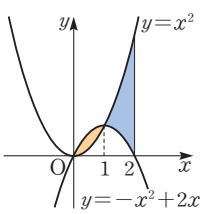
두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+2x$의 교점의 x좌표는

$x^2=-x^2+2x$에서

$2x^2-2x=0$

$x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[0, 1]$에서 $x^2 \leq -x^2+2x$, 닫힌구간 $[1, 2]$에서 $x^2 \geq -x^2+2x$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{(-x^2+2x)-x^2\}dx+\int_1^2 \{x^2-(-x^2+2x)\}dx$$

$$=\int_0^1 (-2x^2+2x)dx+\int_1^2 (2x^2-2x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^3-x^2\right]_1^2=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=2$$

04-3 답 $\frac{1}{2}$

해결전략 | 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기

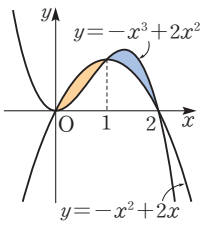
두 곡선 $y=-x^3+2x^2$, $y=-x^2+2x$의 교점의 x좌표는

$-x^3+2x^2=-x^2+2x$에서

$x^3-3x^2+2x=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[0, 1]$에서 $-x^3+2x^2 \leq -x^2+2x$, 닫힌구간 $[1, 2]$에서 $-x^3+2x^2 \geq -x^2+2x$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{(-x^2+2x)-(-x^3+2x^2)\}dx$$

$$+\int_1^2 \{(-x^3+2x^2)-(-x^2+2x)\}dx$$

$$=\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx+\int_1^2 (-x^3+3x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

04-4 답 $\frac{9}{4}$

해결전략 | 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기

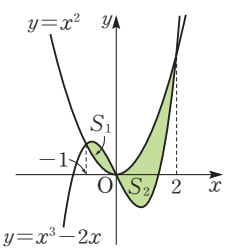
두 곡선 $y=x^2$과 $y=x^3-2x$의 교점의 x좌표는

$x^3-2x=x^2$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



STEP 2 S_1, S_2의 값 구하기

닫힌구간 $[-1, 0]$에서 $x^3-2x \geq x^2$, 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $x^3-2x \leq x^2$이므로

$$S_1=\int_{-1}^0 \{(x^3-2x)-x^2\}dx=\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0=\frac{5}{12}$$

$$S_2=\int_0^2 \{x^2-(x^3-2x)\}dx=\int_0^2 (-x^3+x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

STEP 3 S_2-S_1의 값 구하기

$\therefore S_2-S_1=\frac{8}{3}-\frac{5}{12}=\frac{9}{4}$

◉⊸ 다른 풀이

STEP 2 S_2-S_1의 값 구하기

닫힌구간 $[-1, 0]$에서 $x^3-2x \geq x^2$, 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $x^3-2x \leq x^2$이므로

S_2-S_1

$=\int_0^2\{x^2-(x^3-2x)\}dx-\int_{-1}^0\{(x^3-2x)-x^2\}dx$

$=\int_0^2(-x^3+x^2+2x)dx+\int_{-1}^0(-x^3+x^2+2x)dx$

$=\int_{-1}^2(-x^3+x^2+2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-1}^2$

$=\frac{8}{3}-\frac{5}{12}=\frac{9}{4}$

04-5 답 $\frac{16}{3}$

해결전략 | 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 다음 그래프를 그려 정적분을 이용하여 S_1, S_2의 값을 구한다. 이때 S_1+S_2는 곡선 $y=x(x-4)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이임을 이용한다.

STEP 1 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기

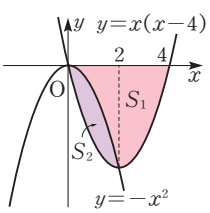
두 곡선 $y=x(x-4)$, $y=-x^2$의 교점의 x좌표는

$x(x-4)=-x^2$에서

$2x^2-4x=0$

$x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$



STEP 2 S_2의 값 구하기

구간 $[0, 2]$에서 $-x^2 \geq x(x-4)$이므로

$S_2=\int_0^2\{-x^2-(x^2-4x)\}dx$

$=\int_0^2(-2x^2+4x)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$

STEP 3 S_1의 값 구하기

한편, $S_1+S_2=\int_0^4(-x^2+4x)dx$이므로

$S_1=\int_0^4(-x^2+4x)dx-\frac{8}{3}$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4-\frac{8}{3}$

$=\frac{32}{3}-\frac{8}{3}=8$

STEP 4 S_1-S_2의 값 구하기

$\therefore S_1-S_2=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$

04-6 답 24

해결전략 | 두 곡선의 교점의 x좌표를 이용하여 함수 $f(x)-g(x)$의 식을 세우고, 넓이가 1임을 이용하여 미정계수를 구한다.

STEP 1 $f(x)-g(x)$의 식 세우기

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$이므로

$f(x)-g(x)=ax(x+1)(x-1)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

STEP 2 넓이를 이용하여 a의 값 구하기

$-1 \leq x \leq 0$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\int_{-1}^0\{f(x)-g(x)\}dx=1$

즉, $\int_{-1}^0 ax(x-1)(x+1)dx=1$이므로

$\int_{-1}^0 a(x^3-x)dx=1$

$a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0=1$

$\frac{a}{4}=1 \quad \therefore a=4$

STEP 3 $f(2)-g(2)$의 값 구하기

따라서 $f(x)-g(x)=4x(x-1)(x+1)=4x^3-4x$이므로

$f(2)-g(2)=4\times 2^3-4\times 2=24$

필수유형 05 301쪽

05-1 답 $\frac{8}{3}$

해결전략 | 접선의 방정식을 구한 다음 곡선과 접선의 교점의 x좌표를 구하고 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 접선의 방정식 구하기

$f(x)=2x^3-4x^2+x+5$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-8x+1$

곡선 위의 점 $(0, 5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=1$이므로 접선의 방정식은

$y-5=1\times(x-0) \quad \therefore y=x+5$

STEP 2 곡선과 접선의 교점의 x좌표 구하기

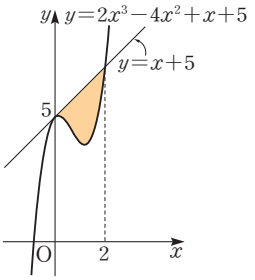
곡선 $y=2x^3-4x^2+x+5$와 직선 $y=x+5$의 교점의 x좌표는

$2x^3-4x^2+x+5=x+5$에서

$2x^3-4x^2=0$

$x^2(x-2)=0$

$\therefore x=0$ (중근) 또는 $x=2$



STEP 3 넓이 구하기

닫힌구간 $[0, 2]$에서

$x+5\geq 2x^3-4x^2+x+5$

이므로 구하는 넓이는

$\int_0^2\{(x+5)-(2x^3-4x^2+x+5)\}dx$

$=\int_0^2(-2x^3+4x^2)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=\frac{8}{3}$

05-2 답 $\frac{4}{3}$

해결전략 | 접선의 방정식을 구한 다음 곡선과 접선의 교점의 x좌표를 구하고 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 접선의 방정식 구하기

$f(x)=x^3-x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x$

곡선 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-2=1$

이므로 접선의 방정식은

$y-4=1\times(x-1)$ $\therefore y=x+3$

STEP 2 곡선과 접선의 교점의 x좌표 구하기

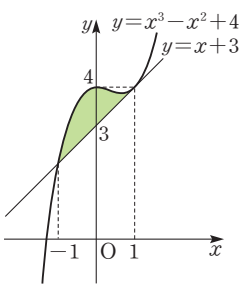
곡선 $y=x^3-x^2+4$와 직선 $y=x+3$의 교점의 x좌표는

$x^3-x^2+4=x+3$에서

$x^3-x^2-x+1=0$

$(x+1)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$(중근)



STEP 3 넓이 구하기

닫힌구간 $[-1, 1]$에서

$x^3-x^2+4\geq x+3$이므로 구하는 넓이는

$\int_{-1}^1\{(x^3-x^2+4)-(x+3)\}dx$

$=\int_{-1}^1(x^3-x^2-x+1)dx=2\int_0^1(-x^2+1)dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{4}{3}$

풍쌤의 비법

정적분 $\int_{-a}^{a}x^n dx$의 계산

(1) n이 0 또는 짝수이면 x^n은 우함수이다.

➡ $\int_{-a}^{a}x^n dx=2\int_0^a x^n dx$

(2) n이 홀수이면 x^n은 기함수이다.

➡ $\int_{-a}^{a}x^n dx=0$

예 $\int_{-2}^{2}(x^5+x^4+x^3+5)dx=2\int_0^2(x^4+5)dx$

05-3 답 $\frac{1}{3}$

해결전략 | 접선의 방정식을 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 접선의 방정식 구하기

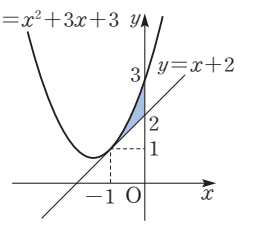
$f(x)=x^2+3x+3$으로 놓으면 $f'(x)=2x+3$

곡선 위의 점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-2+3=1$

이므로 접선의 방정식은

$y-1=1\times\{x-(-1)\}$ $\therefore y=x+2$



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[-1, 0]$에서 $x^2+3x+3\geq x+2$이므로 구하는 넓이는

$\int_{-1}^0\{(x^2+3x+3)-(x+2)\}dx$

$=\int_{-1}^0(x^2+2x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^0=\frac{1}{3}$

05-4 답 $\frac{3}{2}$

해결전략 | 접선의 방정식을 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구하고 a에 대한 식으로 나타낸다.

STEP 1 접선의 방정식 구하기

$f(x)=ax^2$으로 놓으면

$f'(x)=2ax$

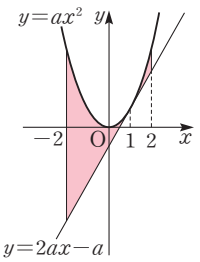
곡선 위의 점 $(1, a)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2a$

이므로 접선의 방정식은

$y-a=2a(x-1)$ $\therefore y=2ax-a$

STEP 2 넓이를 a에 대한 식으로 나타내기

이때 $a>0$이므로 곡선 $y=ax^2$과 접선 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같으므로 도형의 넓이는



$$\int_{-2}^{2}\{ax^2-(2ax-a)\}dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(ax^2+a)dx$$

$$=2\left[\frac{a}{3}x^3+ax\right]_0^2=\frac{28}{3}a$$

STEP 3 a의 값 구하기

따라서 $\frac{28}{3}a=14$이므로 $a=\frac{3}{2}$

05-5 답 11

해결전략 | 접선의 방정식을 구한 다음 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

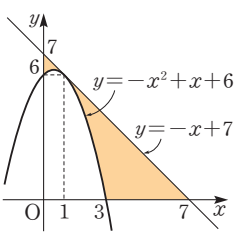
STEP 1 접선의 방정식 구하기

$f(x)=-x^2+x+6$으로 놓으면 $f'(x)=-2x+1$

곡선 위의 점 $(1, 6)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-1$

이므로 접선의 방정식은



$y-6=-(x-1)$ $\therefore y=-x+7$

STEP 2 넓이 구하기

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^7(-x+7)dx-\int_0^3(-x^2+x+6)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+7x\right]_0^7-\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_0^3$$

$$=\frac{49}{2}-\frac{27}{2}=11$$

풍쌤의 비법

곡선 $y=-x^2+x+6$과 직선 $y=-x+7$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를

$$\int_0^7\{(-x+7)-(-x^2+x+6)\}dx$$

로 구하지 않도록 주의하자. 닫힌구간 $[3, 7]$에서는 직선과 x축으로만 둘러싸여 있기 때문이다.

한편, 위의 풀이에서 $\int_0^7(-x+7)dx$ 대신 삼각형의 넓이를 이용하여 $\frac{1}{2}\times7\times7$로 풀 수도 있다.

05-6 답 $\frac{2}{3}$

해결전략 | 접점의 좌표를 (a, a^2-3a+5)로 놓고 접선이 점 $(2, 2)$를 지남을 이용하여 접선의 방정식을 구한 다음 곡선과 접선, 두 접선끼리 만나는 점의 x좌표를 구한다.

STEP 1 접선의 방정식 구하기

$f(x)=x^2-3x+5$로 놓으면

$f'(x)=2x-3$

곡선 위의 점 (a, a^2-3a+5)에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=2a-3$이므로 접선의 방정식은

$y=(2a-3)(x-a)+a^2-3a+5$

이 직선이 점 $(2, 2)$를 지나므로

$2=(2a-3)(2-a)+a^2-3a+5$

$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

따라서 접선의 방정식은

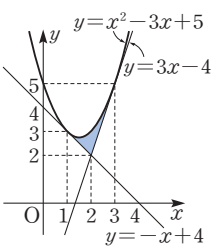
$y=-x+4$ 또는 $y=3x-4$

STEP 2 곡선과 접선의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=x^2-3x+5$와 직선 $y=-x+4$의 교점의 x좌표는 $x^2-3x+5=-x+4$에서

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$(중근)



곡선 $y=x^2-3x+5$와 직선 $y=3x-4$의 교점의 x좌표는

$x^2-3x+5=3x-4$에서

$x^2-6x+9=0$, $(x-3)^2=0$

$\therefore x=3$(중근)

STEP 3 넓이 구하기

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3(x^2-3x+5)dx-\int_1^2(-x+4)dx-\int_2^3(3x-4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x\right]_1^3-\left[-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_1^2-\left[\frac{3}{2}x^2-4x\right]_2^3$$

$$=\frac{20}{3}-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{2}{3}$$

다른 풀이

STEP 3 넓이 구하기

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3(x^2-3x+5)dx-\underbrace{\frac{1}{2}\times(3+2)\times1}_{\text{직선과 } x=2,\ x=3\text{으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이}}-\underbrace{\frac{1}{2}\times(2+5)\times1}_{\text{직선과 } x=1,\ x=2\text{로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이}}$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x\right]_1^3-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$

$$=\frac{20}{3}-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{2}{3}$$

풍쌤의 비법

곡선 밖의 한 점이 주어진 경우의 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 (a, b)가 주어졌을 때

❶ 접점의 좌표를 $(t, f(t))$로 놓는다.

❷ $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 점 (a, b)를 대입하여 t의 값을 구한다.

❸ ❷의 식에 t의 값을 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

필수유형 06

303쪽

06-1 답 6

해결전략 | 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같을 경우 정적분의 값이 0이 됨을 이용하여 미지수를 구한다.

STEP 1 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=x^3-(a+3)x^2+3ax$와 x축의 교점의 x좌표는

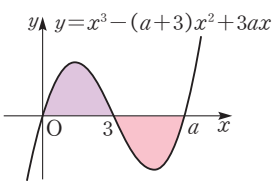
$x^3-(a+3)x^2+3ax=0$

에서

$x(x-3)(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

또는 $x=a$



STEP 2 두 도형의 넓이가 같을 조건 이용하여 식 세우기

곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^a\{x^3-(a+3)x^2+3ax\}dx=0$

STEP 3 a의 값 구하기

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+3}{3}x^3+\frac{3a}{2}x^2\right]_0^a=0$

$\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}(a+3)a^3+\frac{3}{2}a^3=0$

$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^3=0,\ a^4-6a^3=0$

$a^3(a-6)=0 \qquad \therefore a=6\ (\because a>3)$

06-2 답 3

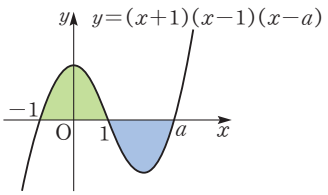
해결전략 | 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같을 경우 정적분의 값이 0이 됨을 이용하여 미지수를 구한다.

STEP 1 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=(x+1)(x-1)(x-a)$와 x축의 교점의 x좌표는 $(x+1)(x-1)(x-a)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=a$

STEP 2 두 도형의 넓이가 같을 조건 이용하여 식 세우기



곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$\int_{-1}^a(x+1)(x-1)(x-a)dx=0$

$\int_{-1}^a(x^3-ax^2-x+a)dx=0$

STEP 3 a의 값 구하기

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{-1}^a=0$

$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}=0$

$a^4-6a^2-8a-3=0$

$(a+1)^3(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>1)$

06-3 답 $\frac{1}{4}$

해결전략 | 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같을 경우 정적분의 값이 0이 됨을 이용하여 미지수를 구한다.

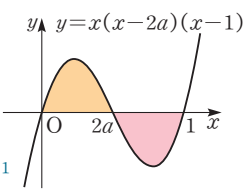
STEP 1 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=x(x-2a)(x-1)$과 x축의 교점의 x좌표는

$x(x-2a)(x-1)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2a$

또는 $x=1$ → $0<a<\frac{1}{2}$에서 $0<2a<1$



STEP 2 두 도형의 넓이가 같을 조건 이용하여 식 세우기

곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^1x(x-2a)(x-1)dx=0$

$\int_0^1\{x^3-(2a+1)x^2+2ax\}dx=0$

STEP 3 a의 값 구하기

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2a+1}{3}x^3+ax^2\right]_0^1=0$

$\frac{1}{4}-\frac{2a+1}{3}+a=0$

$3-4(2a+1)+12a=0,\ 4a=1$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

06-4 답 1

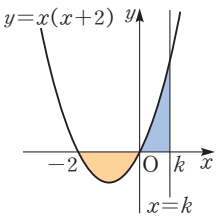
해결전략 | 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같을 경우 정적분의 값이 0이 됨을 이용하여 미지수를 구한다.

STEP 1 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=x(x+2)$와 x축의 교점의 x좌표는

$x(x+2)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$



STEP 2 두 도형의 넓이가 같을 조건 이용하여 식 세우기

곡선과 x축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{-2}^{k}x(x+2)dx=0$$

STEP 3 k의 값 구하기

$$\int_{-2}^{k}(x^2+2x)dx=0,\ \left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-2}^{k}=0$$

$$\frac{1}{3}k^3+k^2-\frac{4}{3}=0,\ k^3+3k^2-4=0$$

$$(k+2)^2(k-1)=0 \qquad \therefore k=1\ (\because k>0)$$

06-5 답 −2

해결전략 | 두 곡선으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같을 경우 정적분의 값이 0이 됨을 이용하여 미지수를 구한다.

STEP 1 두 도형의 넓이가 같을 조건 이용하여 식 세우기

두 곡선으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{0}^{4}\{-x^2(x-4)-ax(x-4)\}dx=0$$

$$\int_{0}^{4}\{-x^3+(4-a)x^2+4ax\}dx=0$$

STEP 2 a의 값 구하기

$$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4-a}{3}x^3+2ax^2\right]_{0}^{4}=0$$

$$-64+\frac{4-a}{3}\times 64+32a=0$$

$$-2+\frac{8-2a}{3}+a=0,\ -6+8-2a+3a=0$$

$$\therefore a=-2$$

06-6 답 2

해결전략 | 두 곡선으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같을 경우 정적분의 값이 0이 됨을 이용하여 미지수를 구한다.

STEP 1 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기

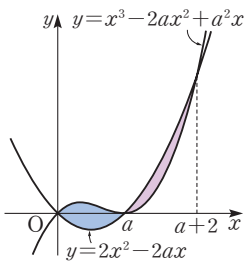
두 곡선 $y=x^3-2ax^2+a^2x$, $y=2x^2-2ax$의 교점의 x좌표는

$x^3-2ax^2+a^2x=2x^2-2ax$에서

$x^3-2(a+1)x^2+a(a+2)x=0$

$x(x-a)\{x-(a+2)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=a+2$



STEP 2 두 도형의 넓이가 같을 조건 이용하여 식 세우기

두 곡선으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{0}^{a+2}\{(x^3-2ax^2+a^2x)-(2x^2-2ax)\}dx=0$$

STEP 3 a의 값 구하기

$$\int_{0}^{a+2}\{x^3-2(a+1)x^2+a(a+2)x\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}(a+1)x^3+\frac{1}{2}a(a+2)x^2\right]_{0}^{a+2}=0$$

$$\frac{1}{4}(a+2)^4-\frac{2}{3}(a+1)(a+2)^3+\frac{1}{2}a(a+2)^3=0$$

$$3(a+2)^4-8(a+1)(a+2)^3+6a(a+2)^3=0$$

$$(a+2)^3\{3(a+2)-8(a+1)+6a\}=0$$

$$(a+2)^3(a-2)=0$$

$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

필수유형 07 305쪽

07-1 답 54

해결전략 | x축에 의하여 넓이가 이등분되므로 곡선과 직선 $y=ax$, 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라고 하면 $S_1=2S_2$이다.

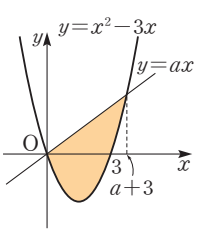
STEP 1 곡선과 직선의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는

$x^2-3x=ax$에서

$x\{x-(a+3)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a+3$



곡선 $y=x^2-3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=0$에서

$x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

STEP 2 곡선과 직선 $y=ax$로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기

곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라고 하면

$$S_1=\int_0^{a+3}\{ax-(x^2-3x)\}dx$$
$$=\int_0^{a+3}\{-x^2+(a+3)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+3}{2}x^2\right]_0^{a+3}=\frac{(a+3)^3}{6}$$

STEP 3 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기

곡선 $y=x^2-3x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라고 하면

$$S_2=-\int_0^3(x^2-3x)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

STEP 4 $(a+3)^3$의 값 구하기

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$이므로

$$\frac{(a+3)^3}{6}=2\times\frac{9}{2}\qquad\therefore\ (a+3)^3=54$$

07-2 답 16

해결전략 | 곡선과 x축, 곡선과 직선 $y=2k$의 교점의 x좌표를 구한 다음 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선과 직선 $y=2k$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 이용한다.

STEP 1 교점의 x좌표 구하기

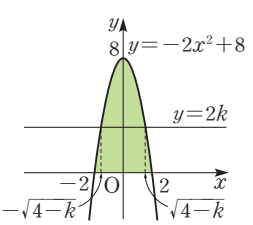
곡선 $y=-2x^2+8$과 x축의 교점의 x좌표는

$-2x^2+8=0$에서

$x^2-4=0$

$(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$



곡선 $y=-2x^2+8$과 직선 $y=2k$의 교점의 x좌표는

$-2x^2+8=2k$에서 $x^2=4-k$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{4-k}$

STEP 2 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기

곡선 $y=-2x^2+8$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라고 하면

$$S_1=\int_{-2}^{2}(-2x^2+8)dx$$
$$=2\int_0^2(-2x^2+8)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2=\frac{64}{3}$$

STEP 3 곡선과 직선 $y=2k$로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기

곡선 $y=-2x^2+8$과 직선 $y=2k$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라고 하면

$$S_2=\int_{-\sqrt{4-k}}^{\sqrt{4-k}}(-2x^2+8-2k)dx$$
$$=2\int_0^{\sqrt{4-k}}(-2x^2+8-2k)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+(8-2k)x\right]_0^{\sqrt{4-k}}$$
$$=\frac{8}{3}(\sqrt{4-k})^3$$

STEP 3 $(4-k)^3$의 값 구하기

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$이므로

$$\frac{64}{3}=2\times\frac{8}{3}(\sqrt{4-k})^3$$

$(\sqrt{4-k})^3=4\qquad\therefore\ (4-k)^3=16$

07-3 답 2

해결전략 | 곡선과 x축, 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 다음 곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 이용한다.

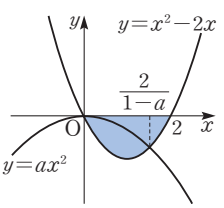
STEP 1 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기

두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=ax^2$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=ax^2$에서

$x\{(1-a)x-2\}=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{1-a}$



곡선 $y=x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

STEP 2 곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기

곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라고 하면

$$S_1=-\int_0^2(x^2-2x)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

STEP 3 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기

두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=ax^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라고 하면

$$S_2=\int_0^{\frac{2}{1-a}}\{ax^2-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{2}{1-a}}\{(a-1)x^2+2x\}dx$$
$$=\left[\frac{a-1}{3}x^3+x^2\right]_0^{\frac{2}{1-a}}=\frac{4}{3(a-1)^2}$$

STEP 4 $(a-1)^2$의 값 구하기

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$이므로

$\frac{4}{3}=2\times\frac{4}{3(a-1)^2}$

$\therefore (a-1)^2=2$

풍쌤의 비법

두 포물선의 교점의 x좌표가 α, β $(\alpha<\beta)$이고, 이차항의 계수가 각각 a_1, a_2일 때, 두 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{|a_1-a_2|}{6}(\beta-\alpha)^3$

즉, 위의 문제 **07-3**에서

$S_2=\frac{|a-1|}{6}\times\left(\frac{2}{1-a}\right)^3=\frac{4}{3(a-1)^2}$

하지만 무턱대고 공식부터 적용하는 것은 금물! 계산 과정에서 생기는 결과이니 해결 과정을 잘 숙지한 다음 공식도 적용시켜 보도록 하자.

07-4 답 -16

해결전략 I 곡선과 y축, 곡선과 직선 $x=ky$의 교점의 y좌표를 구한 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 이용한다.

STEP 1 교점의 y좌표 구하기

곡선 $x=y^2+2y$와 y축의 교점의 y좌표는

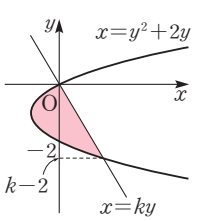
$y^2+2y=0$, $y(y+2)=0$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2$

곡선 $x=y^2+2y$와 직선 $x=ky$의 교점의 y좌표는

$y^2+2y=ky$에서 $y(y+2-k)=0$

$\therefore y=0$ 또는 $y=k-2$



STEP 2 곡선과 직선 $x=ky$로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기

곡선 $x=y^2+2y$와 직선 $x=ky$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라고 하면

$$S_1=\int_{k-2}^{0}\{ky-(y^2+2y)\}dy$$
$$=\int_{k-2}^{0}\{-y^2+(k-2)y\}dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{k-2}{2}y^2\right]_{k-2}^{0}$$
$$=-\frac{1}{6}(k-2)^3$$

STEP 3 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기

곡선 $x=y^2+2y$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라고 하면

$S_2=\int_{-2}^{0}(-y^2-2y)dy=\left[-\frac{1}{3}y^3-y^2\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$

STEP 4 $(k-2)^3$의 값 구하기

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$이므로

$-\frac{1}{6}(k-2)^3=2\times\frac{4}{3}$

$\therefore (k-2)^3=-16$

07-5 답 1

해결전략 I S_1, S_2를 각각 구한 다음 $S_2=2S_1$을 만족시키는 m의 값을 구한다.

STEP 1 S_1의 값 구하기

$S_1=\int_0^4\frac{1}{8}x^2dx=\left[\frac{1}{24}x^3\right]_0^4=\frac{8}{3}$

STEP 2 곡선과 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=\frac{1}{8}x^2$과 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{8}x^2=mx$에서 $x^2-8mx=0$

$x(x-8m)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=8m$

STEP 3 S_2의 값 구하기

$\therefore S_2=\int_4^{8m}\left(mx-\frac{1}{8}x^2\right)dx$

$=\left[\frac{m}{2}x^2-\frac{1}{24}x^3\right]_4^{8m}$

$=\frac{32}{3}m^3-8m+\frac{8}{3}$

STEP 4 m의 값 구하기

이때 $S_2=2S_1$이므로

$\frac{32}{3}m^3-8m+\frac{8}{3}=2\times\frac{8}{3}$

$4m^3-3m-1=0$, $(m-1)(2m+1)^2=0$

$\therefore m=1\left(\because m>\frac{1}{2}\right)$

07-6 답 16

해결전략 I 넓이를 k를 이용하여 나타낸 다음 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값을 구한다.

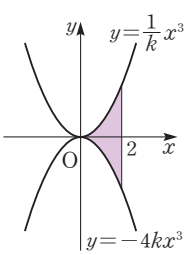
STEP 1 넓이를 k를 이용하여 나타내기

두 곡선 $y=\frac{1}{k}x^3$, $y=-4kx^3$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^2\left\{\frac{1}{k}x^3-(-4kx^3)\right\}dx$

$=\left(4k+\frac{1}{k}\right)\int_0^2x^3dx$

$=\left(4k+\frac{1}{k}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=4\left(4k+\frac{1}{k}\right)$



STEP 2 최솟값 구하기

이때 $4k>0$, $\frac{1}{k}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4\left(4k+\frac{1}{k}\right)\geq 4\times 2\sqrt{4k\times\frac{1}{k}}=16$

$\left(\text{단, 등호는 } 4k=\frac{1}{k}, \text{ 즉 } k=\frac{1}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 16이다.

풍쌤의 비법

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

필수유형 08 307쪽

08-1 답 $\frac{1}{3}$

해결전략 | 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계를 파악하고, 함수의 그래프와 직선 $y=x$를 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계 알기

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

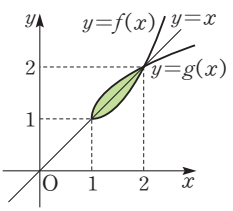
STEP 2 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표 구하기

$x^2-2x+2=x$에서

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$



STEP 3 넓이 구하기

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$2\int_1^2\{x-(x^2-2x+2)\}dx$

$=2\int_1^2(-x^2+3x-2)dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2$

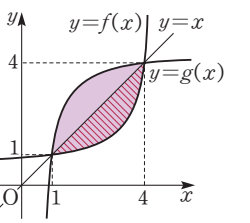
$=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

08-2 답 10

해결전략 | 먼저 $\int_1^4 f(x)dx$의 값을 이용하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 이용한다.

STEP 1 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기

오른쪽 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\int_1^4\{x-f(x)\}dx$

$=\int_1^4 x\,dx-\int_1^4 f(x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^4-\frac{5}{2}$

$=\frac{15}{2}-\frac{5}{2}=5$

STEP 2 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 빗금 친 부분의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$2\times 5=10$

08-3 답 5

해결전략 | 먼저 함수 $f(x)=\sqrt{ax}$의 역함수를 구하고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 이용한다.

STEP 1 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계 알기

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

STEP 2 역함수를 구하여 교점의 x좌표 구하기

함수 $f(x)=\sqrt{ax}$의 역함수는

$f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x^2\ (x\geq 0)$

곡선 $y=\frac{1}{a}x^2$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{a}x^2=x$에서

$x(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$

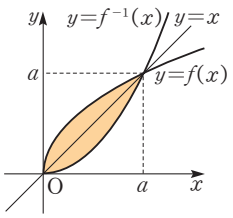
STEP 3 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타내기

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^a\left(x-\frac{1}{a}x^2\right)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3a}x^3\right]_0^a$$

$$=2\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}a^2\right)=\frac{1}{3}a^2$$



STEP 4 a의 값 구하기

따라서 $\frac{1}{3}a^2=\frac{25}{3}$이므로 $a^2=25$

$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

풍쌤의 비법

함수 $f(x)=\sqrt{ax}$는 무리함수이므로 적분하기가 어렵다. 따라서 다항함수의 정적분을 이용하기 위해 역함수를 구하고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 때 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 이용한다.

08-4 답 $\frac{1}{48}$

해결전략 | 주어진 두 함수의 관계를 파악하고 함수의 그래프와 직선 $y=x$를 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 증가하는 함수, 역함수 파악하기

$y=2x^3+x^2+x$에서

$y'=6x^2+2x+1$

이차방정식 $6x^2+2x+1=0$의 판별식을 D라고 하면

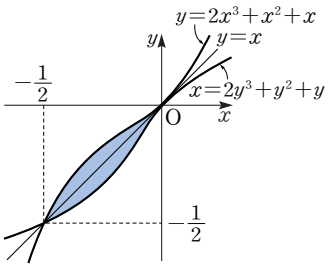
$\frac{D}{4}=1-6<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $y'>0$이다.

즉, $y=2x^3+x^2+x$는 증가하는 함수이다.

이때 $y=2x^3+x^2+x$에 x 대신 y를, y 대신 x를 대입하면 $x=2y^3+y^2+y$이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

따라서 두 곡선 $y=2x^3+x^2+x$, $x=2y^3+y^2+y$의 교점은 곡선 $y=2x^3+x^2+x$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

STEP 2 곡선 $y=2x^3+x^2+x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표 구하기



$2x^3+x^2+x=x$에서

$2x^3+x^2=0$, $x^2(2x+1)=0$

$\therefore x=0$(중근) 또는 $x=-\frac{1}{2}$

STEP 3 넓이 구하기

이때 두 곡선 $y=2x^3+x^2+x$, $x=2y^3+y^2+y$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=2x^3+x^2+x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$$2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\{(2x^3+x^2+x)-x\}dx=2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(2x^3+x^2)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}$$

$$=2\times\frac{1}{96}=\frac{1}{48}$$

08-5 답 16

해결전략 | 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계를 파악하여 넓이를 구한다.

STEP 1 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계 알기

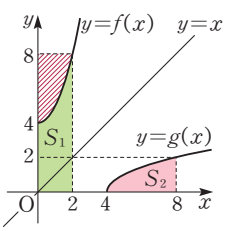
함수 $g(x)=\sqrt{x-4}$의 역함수가 $f(x)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

STEP 2 $\int_0^2 f(x)dx$, $\int_4^8 g(x)dx$가 나타내는 부분을 그래프에서 찾기

$\int_0^2 f(x)dx=S_1$,

$\int_4^8 g(x)dx=S_2$라고 하면

S_1, S_2의 값은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같다.



STEP 3 대칭성을 이용하여 정적분의 값 구하기

이때 위의 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 S_2와 같으므로

$$\int_0^2 f(x)dx+\int_4^8 g(x)dx=S_1+S_2$$

$$=2\times8=16$$

08-6 답 42

해결전략 | 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계를 파악하고, 일부를 대칭이동시켜 넓이를 간단히 구한다.

STEP 1 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계 알기

함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x$에서

$f'(x)=3x^2-6x+5=3(x-1)^2+2>0$이므로

함수 $f(x)$는 증가하는 함수이다.

한편, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭으로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

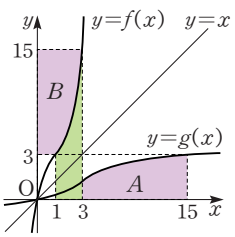
STEP 2 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표 구하기

교점의 x좌표는

$x^3-3x^2+5x=x$에서

$x(x^2-3x+4)=0$

$\therefore x=0$ ($\because x^2-3x+4>0$)



STEP 3 대칭성을 이용하여 정적분의 값 구하기

$\int_3^{15} g(x)dx$의 값은 색칠한 부분 A의 넓이이고, 역함수의 성질에 의하여 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 부분 B의 넓이와 같다.

$\therefore \int_1^3 f(x)dx+\int_3^{15} g(x)dx=(3\times 15)-(1\times 3)$

$=45-3=42$

필수유형 09

309쪽

09-1 답 (1) $\frac{15}{2}$ (2) 4

해결전략 | 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$임을 이용한다.

(1) $0+\int_0^3 (4-t)dt=\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^3=\frac{15}{2}$

(2) $\int_1^5 (4-t)dt=\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_1^5=4$

09-2 답 3초 후

해결전략 | 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$이고 점 P가 원점으로 다시 돌아오면 위치의 변화량이 0임을 이용한다.

STEP 1 위치의 변화량이 0이 되는 식 세우기

a초 후에 점 P가 원점으로 다시 돌아온다고 하면 점 P의 위치의 변화량이 0이므로

$\int_0^a (3t^2+2t-12)dt=0$

STEP 2 a의 값을 구하여 시간 구하기

$\left[t^3+t^2-12t\right]_0^a=0$

$a^3+a^2-12a=0$, $a(a+4)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

따라서 점 P는 3초 후에 원점으로 다시 돌아온다.

09-3 답 6

해결전략 | 시각 t에서 점 P의 위치 x는 $x=x_0+\int_0^t v(t)dt$임을 이용한다.

원점을 출발하는 점 P의 $t=4$에서의 위치는

$$0+\int_0^4 v(t)dt=\int_0^2 (-t^2+4t)dt+\int_2^4 (t^2-5t+6)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+6t\right]_2^4$$
$$=\frac{16}{3}+\frac{2}{3}=6$$

09-4 답 5

해결전략 | 시각 t에서 점 P의 위치 x는 $x=x_0+\int_0^t v(t)dt$이고 물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0임을 이용한다.

STEP 1 3초 후의 위치 구하기

물체의 3초 후의 위치는

$30+\int_0^3 (20-10t)dt=30+\left[20t-5t^2\right]_0^3$

$=30+15=45$

$\therefore h_1=45$

STEP 2 최고 높이 구하기

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$20-10t=0$에서 $t=2$

즉, $t=2$일 때 최고 높이에 도달하므로 최고 높이는

$30+\int_0^2 (20-10t)dt=30+\left[20t-5t^2\right]_0^2$

$=30+20=50$

$\therefore h_2=50$

STEP 3 $|h_1-h_2|$의 값 구하기

$\therefore |h_1-h_2|=|45-50|=5$

09-5 답 $-\frac{8}{3}$

해결전략 | 운동 방향이 바뀌는 순간은 속도가 0인 순간과 같음을 이용한다.

STEP 1 속도가 0인 순간의 시각 t 구하기

점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간에 $v(t)=0$이므로

$t^2-5t+4=0$, $(t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=4$

STEP 2 4초 후의 점 P의 위치 구하기

따라서 1초, 4초 후에 점 P의 운동 방향이 바뀌고, 4초 후에 두 번째로 바뀌므로 이때 점 P의 위치를 x라고 하면

$$x=\int_0^4(t^2-5t+4)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_0^4$$
$$=-\frac{8}{3}$$

09-6 답 2

해결전략 | 위치의 변화량이 같을 때 서로 만난다는 것을 이용하여 시각을 구한다.

STEP 1 두 점 A, B의 위치에 대한 식 세우기

두 점 A, B의 시각 a에서 위치를 각각 $x_A(a)$, $x_B(a)$라고 하면

$$x_A(a)=0+\int_0^a(6-t)dt$$
$$=\left[6t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^a$$
$$=6a-\frac{1}{2}a^2$$

$$x_B(a)=12+\int_0^a(2t-3)dt$$
$$=12+\left[t^2-3t\right]_0^a$$
$$=a^2-3a+12$$

STEP 2 만나는 시각 구하기

이때 두 점 A, B가 서로 만나는 때는 $x_A(a)=x_B(a)$인 경우이므로

$6a-\frac{1}{2}a^2=a^2-3a+12$

$a^2-6a+8=0$, $(a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

STEP 3 만나는 횟수 구하기

따라서 두 점 A, B는 출발 후 $a=2$, $a=4$일 때 만나므로 서로 만나는 횟수는 2이다.

필수유형 10 311쪽

10-1 답 32

해결전략 | 위치의 변화량이 0일 때의 시각과 속도가 0일 때의 시각을 먼저 구한 다음 움직인 거리를 구한다.

STEP 1 위치의 변화량이 0일 때의 시각 구하기

점 P가 원점을 출발하여 다시 원점으로 돌아오는 데 걸리는 시간을 a초라고 하면 출발한 지 a초 후의 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$\int_0^a(-2t+8)dt=0$

$\left[-t^2+8t\right]_0^a=0$

$-a^2+8a=0$, $a(a-8)=0$

$\therefore a=8$ ($\because a>0$)

STEP 2 속도가 0인 시각 구하기

속도가 0인 시각은

$v(t)=-2t+8=0$에서 $t=4$

STEP 3 점 P가 움직인 거리 구하기

따라서 점 P가 출발한 후 원점으로 다시 돌아올 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^8|-2t+8|dt=\int_0^4(-2t+8)dt+\int_4^8(2t-8)dt$$
$$=\left[-t^2+8t\right]_0^4+\left[t^2-8t\right]_4^8$$
$$=16+16=32$$

풍쌤의 비법

운동 방향을 한 번만 바꾸는 경우($v(t)=0$인 t의 값이 1개만 있는 경우) 점 P가 원점을 출발한 후 원점으로 다시 돌아올 때까지 움직인 거리는 원점을 출발한 후 운동 방향을 바꾸기 전까지(속도가 0이 될 때까지) 움직인 거리의 2배이다. 따라서 **10-1**번에서 다시 원점으로 돌아오는 데 걸리는 시간을 구할 필요없이 속도가 0인 시각 $t=4$만 구해도 (움직인 거리)$=2\int_0^4(-2t+8)dt$임을 이용하여 문제를 풀 수도 있다.

10-2 답 225 m

해결전략 | 속도가 0일 때의 시각을 구한 다음 움직인 거리를 구한다.

STEP 1 자동차가 정지할 때의 시각 구하기

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=30-2t=0$ $\therefore t=15$

STEP 2 이동한 거리 구하기

따라서 제동을 건 후 15초 후에 자동차가 정지하므로 자동차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^{15}|30-2t|\,dt=\int_0^{15}(30-2t)\,dt$$
$$=\left[30t-t^2\right]_0^{15}=225\ (\mathrm{m})$$

10-3 답 72 m

해결전략 | 지면에 떨어질 때는 위치의 변화량이 0일 때이다. 이를 이용하여 k의 값을 구한 다음 움직인 거리를 구한다.

STEP 1 k의 값 구하기

물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$$\int_0^6(-8t+k)\,dt=0$$

$$\left[-4t^2+kt\right]_0^6=0$$

$$-144+6k=0 \qquad \therefore\ k=24$$

STEP 2 최고 높이에 도달한 시각 구하기

$$\therefore\ v(t)=-8t+24\ (\mathrm{m/s})$$

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$$v(t)=-8t+24=0 \qquad \therefore\ t=3$$

STEP 3 움직인 거리 구하기

즉, $t=3$일 때 이 물체는 최고 높이에 도달하고, 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는 최고 높이의 2배이므로

$$2\int_0^3(-8t+24)\,dt=2\left[-4t^2+24t\right]_0^3$$
$$=2\times36=72$$

따라서 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는 72 m이다.

10-4 답 $\frac{32}{3}$

해결전략 | 속도가 양이면 오른쪽으로, 속도가 음이면 왼쪽으로 움직인다. 출발할 때 속도가 음이면 왼쪽으로 움직이기 시작한 것이다.

STEP 1 양의 방향으로 움직인 시각 구하기

점 P가 원점을 출발할 때의 속도는 $v(0)=-12<0$이므로 점 P는 음의 방향으로 출발한다.

따라서 음의 방향과 반대 방향으로 움직이는 구간은

$v(t)=-t^2+8t-12\ge0$에서 $(t-2)(t-6)\le0$

$$\therefore\ 2\le t\le6$$

STEP 2 움직인 거리 구하기

따라서 $2\le t\le6$에서 $v(t)\ge0$이므로 점 P가 $2\le t\le6$에서 움직인 거리는

$$\int_2^6|v(t)|\,dt=\int_2^6(-t^2+8t-12)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+4t^2-12t\right]_2^6=\frac{32}{3}$$

10-5 답 $324\pi\ \mathrm{cm}^3$

해결전략 | 기름이 빠져나오는 속도가 0일 때의 시각을 먼저 구한 다음 빠져나온 기름의 양을 구한다.

STEP 1 기름이 멈출 때 시각 구하기

$v(t)=0$일 때 기름이 멈추므로

$$6t-t^2=0,\ t(6-t)=0$$

$$\therefore\ t=6\ (\because\ t>0)$$

STEP 2 기름이 빠져나온 관의 길이 구하기

이때 6초 동안 기름이 빠져나온 관의 길이는

$$\int_0^6|6t-t^2|\,dt=\int_0^6(6t-t^2)\,dt$$
$$=\left[3t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^6=36\ (\mathrm{cm})$$

STEP 3 빠져나온 기름의 양 구하기

따라서 6초 동안 빠져나온 기름의 양은

$$\pi\times3^2\times36=324\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$

10-6 답 35 km

해결전략 | 3 km를 달린 지점은 위치의 변화량이 3 km임을 뜻하므로 위치의 변화량이 3 km인 시각을 먼저 구한다.

STEP 1 위치의 변화량이 3 km일 때의 시각 구하기

3 km를 달리는 데 걸린 시간을 a분이라고 하면 열차의 a분 후의 위치가 3 km이므로

$$\int_0^a v(t)\,dt=3\text{에서}$$

$$\int_0^a\left(\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t\right)dt=3$$

$$\left[\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^a=3$$

$$\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{4}a^2=3,\ a^3+a^2-12=0$$

$$(a-2)(a^2+3a+6)=0$$

$$\therefore\ a=2\ (\because\ a^2+3a+6>0)$$

STEP 2 10분 동안 달린 거리 구하기

즉, 열차가 3 km를 달리는 데 걸린 시간은 2분이고, 2분 후의 속도는

$$v(2)=\frac{3}{4}\times2^2+\frac{1}{2}\times2=4\ (\mathrm{km/m})$$

따라서 이 열차가 출발 후 10분 동안 달린 거리는

$$3+\int_2^{10}4\,dt=3+\left[4t\right]_2^{10}=3+32=35\ (\mathrm{km})$$

필수유형 11

313쪽

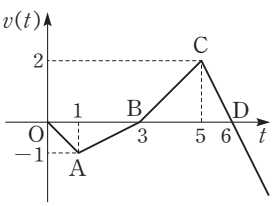
11-1 답 (1) 2 (2) $\frac{3}{2}$

해결전략 | 원점을 출발한 후 시각 $t=a$에서 점 P의 위치는 $\int_0^a v(t)dt$이다.

(1) 그래프에서 $t=3$, $t=6$일 때 $v(t)=0$이고, $t=3$, $t=6$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 출발 후 운동 방향을 2번 바꾼다.

(2) STEP 1 위치의 변화량 알기

시각 $t=6$에서 점 P의 위치는 $t=0$에서 $t=6$까지의 속도의 정적분 값과 같다.



STEP 2 정적분 계산하기

시각 $t=6$에서 점 P의 위치는

$$\int_0^6 v(t)dt=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^6 v(t)dt$$
$$=-\triangle OAB+\triangle BDC$$
$$=-\left(\frac{1}{2}\times3\times1\right)+\frac{1}{2}\times3\times2$$
$$=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}$$

11-2 답 ㄴ, ㄷ

해결전략 | 속도의 그래프와 적분값을 이용하여 참, 거짓을 판정한다.

STEP 1 $t=5$에서 $t=6$까지 $v(t)$의 그래프 해석하기

ㄱ. $t=5$에서 $t=6$까지 점 P는 속도 2로 일정하게 움직인다. (거짓)

STEP 2 $v(t)$의 값의 부호가 바뀌는 t의 값 찾기

ㄴ. $v(t)$의 값이 양에서 음으로 바뀐 t의 값은 $t=2$이고, 음에서 양으로 바뀐 t의 값은 $t=4$이므로 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다. (참)

STEP 3 $v(t)$ 적분하기

ㄷ. $\int_0^4 v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^4 v(t)dt$

$$=\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times2\times2=0$$

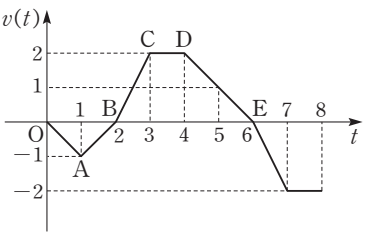
이므로 점 P는 출발한 지 4초 후 출발점에 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11-3 답 ㄱ, ㄷ

해결전략 | 속도의 그래프와 적분값을 이용하여 참, 거짓을 판정한다.

STEP 1 $t=6$일 때, 물체의 위치 구하기



ㄱ. $t=6$일 때, 물체의 위치는

$$\int_0^6 v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^6 v(t)dt$$
$$=-\triangle OAB+\square CBED$$
$$=-\left(\frac{1}{2}\times2\times1\right)+\frac{1}{2}\times(1+4)\times2$$
$$=-1+5=4\ (참)$$

STEP 2 처음으로 멈추었을 때까지 물체가 움직인 거리 구하기

ㄴ. 출발 후 처음으로 멈추었을 때의 시각은 $t=2$이다.

이때 $t=2$까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v(t)|dt=\triangle OAB=\frac{1}{2}\times2\times1=1\ (거짓)$$

STEP 3 속도가 0인 t의 값 구하기

ㄷ. 물체가 운동 방향을 바꾸는 시각은 속도 $v(t)=0$일 때이므로 출발 후 $t=2$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸고 $t=6$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾼다. 즉, 운동 방향을 2번 바꾼다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11-4 답 ㄴ, ㄹ

해결전략 | 속도의 그래프와 적분값을 이용하여 참, 거짓을 판정한다.

STEP 1 $f(8)$의 값 구하기

ㄱ. $f(t)=\int_0^t v(t)dt$는 점 P의 시각 t에서의 위치이므로 $f(8)=\int_0^8 v(t)=0$이다. (거짓)

STEP 2 $f(10)$의 값과 $f(2)$의 값 비교하기

ㄴ. $f(10)=\int_0^{10} v(t)dt$

$$=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^{10} v(t)dt$$
$$=\int_0^2 v(t)dt=f(2)\ (참)$$

STEP 3 $f(t)=0$인 t의 값 구하기

ㄷ. 점 P가 원점을 지날 때는

$f(t)=\int_0^t v(t)dt=0\ (t>0)$

일 때, 즉 $t=4$ 또는 $t=8$일 때로 출발 후 2번 지난다. (거짓)

STEP 4 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기

ㄹ. 점 P가 10초 동안 실제로 움직인 거리는 속도 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이이므로 5이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

유형 특강 315쪽

1 답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{125}{6}$ (3) 108

해결전략 | 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하고 포물선의 킬러공식을 이용하여 넓이를 구한다.

(1) STEP 1 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=x^2-5x+6$과 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-5x+6=0$에서

$(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[2, 3]$에서 $y\le 0$이므로 구하는 넓이는

$\int_2^3 -(x^2-5x+6)dx=\frac{|1|}{6}\times(3-2)^3=\frac{1}{6}$

(2) STEP 1 곡선과 직선의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=x^2-2x-5$와 직선 $y=x-1$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x-5=x-1$에서

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[-1, 4]$에서 $x^2-2x-5\le x-1$이므로 구하는 넓이는

$\int_{-1}^4\{(x-1)-(x^2-2x-5)\}dx$

$=\frac{|-1|}{6}\times\{4-(-1)\}^3=\frac{125}{6}$

(3) STEP 1 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기

두 곡선 $y=x^2+6x+9$, $y=-2x^2-6x+24$의 교점의 x좌표는 $x^2+6x+9=-2x^2-6x+24$에서

$3x^2+12x-15=0$, $(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[-5, 1]$에서

$x^2+6x+9\le -2x^2-6x+24$이므로 구하는 넓이는

$\int_{-5}^1\{(-2x^2-6x+24)-(x^2+6x+9)\}dx$

$=\frac{|-2-1|}{6}\times\{1-(-5)\}^3=108$

실전 연습 문제 316~318쪽

01 ③	02 1	03 ⑤	04 ⑤	05 3
06 ①	07 $\frac{1}{3}$	08 ②	09 $\frac{16}{3}$	10 $\frac{32}{3}$
11 $\frac{4}{5}$	12 ②	13 ④	14 ③	15 2
16 ①	17 30			

01

해결전략 | 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구한 다음 k의 값의 범위를 나누어 주어진 넓이를 만족시키는 k의 값을 구한다.

STEP 1 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=-x^2+kx$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+kx=0$에서

$x(x-k)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=k$

STEP 2 k의 값의 범위를 나누어 k의 값 구하기

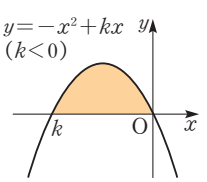
(i) $k<0$일 때

닫힌구간 $[k, 0]$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이는

$\int_k^0(-x^2+kx)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_k^0$

$=-\frac{k^3}{6}$



즉, $-\frac{k^3}{6}=\frac{125}{6}$이므로 $k=-5$

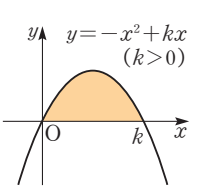
(ii) $k>0$일 때

닫힌구간 $[0, k]$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이는

$\int_0^k(-x^2+kx)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k=\frac{k^3}{6}$

즉, $\frac{k^3}{6}=\frac{125}{6}$이므로 $k=5$



STEP 3 k의 값의 합 구하기

(i), (ii)에 의하여 모든 k의 값의 합은

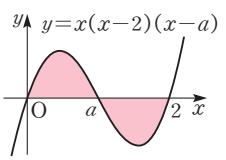
$-5+5=0$

02

해결전략 | 그래프의 개형을 그린 다음 넓이를 a에 대한 함수로 나타내고, 이 함수가 최솟값을 가질 때의 a의 값을 구한다.

STEP 1 그래프의 개형 파악하기

함수 $y=x(x-2)(x-a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ····· ❶



STEP 2 넓이 구하기

닫힌구간 $[0, a]$에서 $y\geq 0$, 닫힌구간 $[a, 2]$에서 $y\leq 0$이므로 구하는 넓이를 $S(a)$라고 하면

$$S(a)$$
$$=\int_0^a x(x-2)(x-a)dx-\int_a^2 x(x-2)(x-a)dx$$
$$=\int_0^a \{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$$
$$-\int_a^2 \{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_0^a-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_a^2$$
$$=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$$ ····· ❷

STEP 3 최솟값 구하기

$S(a)$의 양변을 a에 대하여 미분하면

$$S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a^2-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}(a^3-3a^2+2)$$
$$=-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$$

$S'(a)=0$에서 $a=1$ ($\because 0<a<2$)

함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	···	1	···	(2)
$S'(a)$		−	0	+	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=1$일 때 극소이면서 최소이다. ····· ❸

채점 요소	배점
❶ 그래프의 개형 알기	20 %
❷ 둘러싸인 도형의 넓이 $S(a)$ 구하기	40 %
❸ $S(a)$가 최소인 경우 구하기	40 %

03

해결전략 | 우함수의 성질을 이용하여 구하는 부분의 넓이를 구한다.

STEP 1 함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표 구하기

$y=x^2-2|x|-8$에서

(i) $x\geq 0$일 때, $y=x^2-2x-8$

$x^2-2x-8=0$에서

$(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=4$ ($\because x\geq 0$)

(ii) $x<0$일 때, $y=x^2+2x-8$

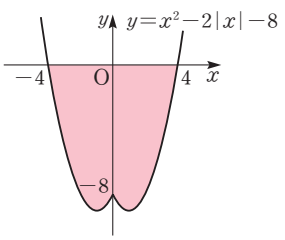
$x^2+2x-8=0$에서

$(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ ($\because x<0$)

STEP 2 우함수의 성질을 이용하여 넓이 구하기

함수 $y=x^2-2|x|-8$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 y축에 대하여 대칭이다.



닫힌구간 $[0, 4]$에서 $y\leq 0$이므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^4 |x^2-2x-8|dx=-2\int_0^4 (x^2-2x-8)dx$$
$$=-2\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-8x\right]_0^4$$
$$=(-2)\times\left(-\frac{80}{3}\right)=\frac{160}{3}$$

04

해결전략 | 정적분으로 나타내어진 함수를 미분하여 $f(x)$를 구하고 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$ 구하기

$xf(x)=\int_0^x tf'(t)dt+\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=xf'(x)+2x^2-4x-6$

$\therefore f(x)=2x^2-4x-6$

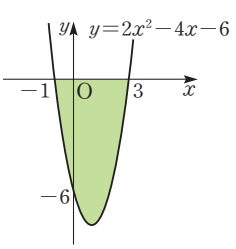
STEP 2 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $y=2x^2-4x-6$과 x축의 교점의 x좌표는

$2x^2-4x-6=0$에서

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$



STEP 3 넓이 구하기

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 $y \le 0$이므로 구하는 넓이는

$$-\int_{-1}^{3}(2x^2-4x-6)dx=-2\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx$$
$$=-2\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-1}^{3}$$
$$=(-2)\times\left(-\frac{32}{3}\right)=\frac{64}{3}$$

05

해결전략 | 넓이와 정적분 사이의 관계와 정적분의 정의를 이용한다.

STEP 1 $\int_{-4}^{2} f(x)dx$의 값 구하기

두 도형 P, Q의 넓이가 각각 6, 2이므로

$$\int_{-4}^{0} f(x)dx=-6,\ \int_{0}^{2} f(x)dx=2$$
$$\therefore \int_{-4}^{2} f(x)dx=\int_{-4}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$$
$$=-6+2=-4$$

STEP 2 $F(-4)$의 값 구하기

$f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$$\int_{-4}^{2} f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_{-4}^{2}=F(2)-F(-4)=-4$$

이때 $F(2)=-1$이므로

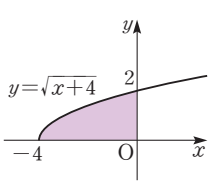
$$-1-F(-4)=-4$$
$$\therefore F(-4)=3$$

06

해결전략 | $y=\sqrt{x+4}$를 $x=$(y에 대한 식)으로 나타내어 y에 대한 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 곡선의 개형 파악하기

곡선 $y=\sqrt{x+4}$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같다.



STEP 2 넓이 구하기

$y=\sqrt{x+4}$에서

$$x=y^2-4\ (y\ge 0)$$

따라서 구하는 넓이는

$$-\int_{0}^{2}(y^2-4)dy=-\left[\frac{1}{3}y^3-4y\right]_{0}^{2}=\frac{16}{3}$$

07

해결전략 | 먼저 $y=f(x)$의 식을 구하고, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=x^2+1$의 개형을 그려 교점의 x좌표를 구한 다음 넓이를 구한다.

STEP 1 $y=f(x)$ 구하기

곡선 $y=x^2$을 x축에 대하여 대칭이동하면

$$y=-x^2$$

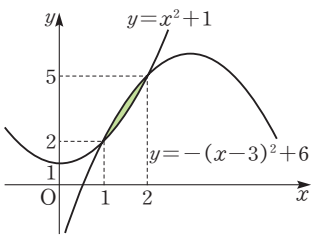
이를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동하면

$$y=-(x-3)^2+6 \quad \cdots\cdots ❶$$

STEP 2 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기

두 곡선 $y=x^2+1$, $y=-(x-3)^2+6$의 교점의 x좌표는

$$x^2+1=-(x-3)^2+6$$에서
$$2x^2-6x+4=0$$
$$x^2-3x+2=0,\ (x-1)(x-2)=0$$
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2 \quad \cdots\cdots ❷$$



STEP 3 넓이 구하기

닫힌구간 $[1, 2]$에서 $x^2+1 \le -x^2+6x-3$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{1}^{2}\{(-x^2+6x-3)-(x^2+1)\}dx$$
$$=\int_{1}^{2}(-2x^2+6x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_{1}^{2}=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ❸$$

채점 요소	배점
❶ 함수 $y=f(x)$의 식 구하기	40 %
❷ 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기	40 %
❸ 넓이 구하기	20 %

풍쌤의 비법

도형의 평행이동, 대칭이동

함수 $y=f(x)$의 그래프를

(1) x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동 ➡ x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입

(2) x축에 대하여 대칭이동 ➡ y 대신 $-y$를 대입

(3) y축에 대하여 대칭이동 ➡ x 대신 $-x$를 대입

(4) 원점에 대하여 대칭이동 ➡ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입

(5) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 ➡ x 대신 y, y 대신 x를 대입

08

해결전략 | 접선의 방정식을 구한 다음 포물선과 접선의 개형을 파악하고 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

STEP 1 접선의 방정식 구하기

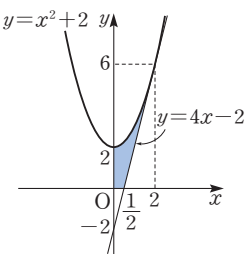
$f(x)=x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=2x$

곡선 위의 점 $(2,\ 6)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 접선의 방정식은

$y-6=4(x-2)$ $\quad\therefore y=4x-2$

STEP 2 넓이 구하기

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는 곡선 $y=x^2+2$와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이에서 두 직선 $y=4x-2$, $x=2$와 x축으로 이루어진 삼각형의 넓이를 뺀 것과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2(x^2+2)dx-\frac{1}{2}\times\left(2-\frac{1}{2}\right)\times 6=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^2-\frac{9}{2}$$
$$=\frac{20}{3}-\frac{9}{2}=\frac{13}{6}$$

09

해결전략 | 두 접선의 방정식을 구한 다음 각각의 접점의 x좌표를 구한다.

STEP 1 접선의 방정식 구하기

$f(x)=x^2+3$으로 놓으면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+3)$이라고 하면 $x=t$에서의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+3)=2t(x-t)$

$\therefore y=2tx-t^2+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 접선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=-2t-t^2+3$

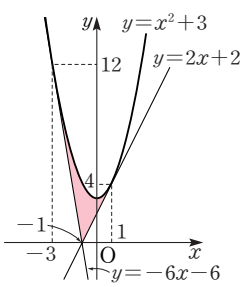
$t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

(i) $t=-3$일 때, ㉠에서 $y=-6x-6$

(ii) $t=1$일 때, ㉠에서 $y=2x+2$



STEP 2 넓이 구하기

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-3}^{-1}\{(x^2+3)-(-6x-6)\}dx+\int_{-1}^{1}\{(x^2+3)-(2x+2)\}dx$$
$$=\int_{-3}^{-1}(x^2+6x+9)dx+2\int_0^1(x^2+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x\right]_{-3}^{-1}+2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=\frac{8}{3}+2\times\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$$

풍쌤의 비법

위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는 곡선 $y=x^2+3$과 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이에서 두 삼각형의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\int_{-3}^{1}(x^2+3)dx-\frac{1}{2}\times 2\times 12-\frac{1}{2}\times 2\times 4$$

로 구할 수도 있다.

10

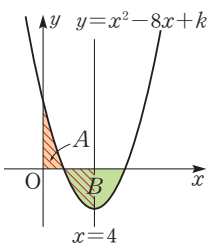
해결전략 | 정적분과 넓이 사이의 관계를 통해 정적분의 값이 0이 되는 경우를 이용한다.

STEP 1 $\int_0^2(x^2-8x+k)dx=0$임을 알기

$A:B=1:2$에서 $B=2A$

곡선 $y=x^2-8x+k$가 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 도형은 넓이가 같고 정적분의 값의 부호는 반대이다.

즉, $\int_0^4(x^2-8x+k)dx=0$



$\cdots\cdots$ ❶

STEP 2 k의 값 구하기

$\left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+kx\right]_0^4=0$

$-\frac{128}{3}+4k=0$ $\quad\therefore k=\frac{32}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ❷

채점 요소	배점
❶ $\int_0^4(x^2-8x+k)dx=0$임을 알기	50 %
❷ k의 값 구하기	50 %

11

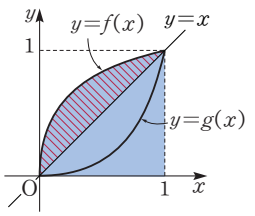
해결전략 | 함수와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의

2배임을 이용한다.

STEP 1 $\int_0^1 f(x)dx$가 나타내는 부분 알기

닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x) \geq 0$이므로

$\int_0^1 f(x)dx$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 나타낸다.



STEP 2 $\int_0^1 f(x)dx$가 나타내는 부분을 적당히 나누어 정적분의 값 구하기

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{3}{5}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{4}{5}$

12

해결전략 | 함수와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배임을 이용한다.

STEP 1 증가하는 함수, 역함수 파악하기

$y=x^3-2x^2+2x$에서

$y'=3x^2-4x+2$

이차방정식 $3x^2-4x+2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4-6<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $y'>0$이다.

즉, $y=x^3-2x^2+2x$는 증가하는 함수이다.

이때 $y=x^3-2x^2+2x$에 x 대신 y를, y 대신 x를 대입하면 $x=y^3-2y^2+2y$이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

따라서 두 곡선 $y=x^3-2x^2+2x$, $x=y^3-2y^2+2y$의 교점은 곡선 $y=x^3-2x^2+2x$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

STEP 2 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표 구하기

$x^3-2x^2+2x=x$에서

$x^3-2x^2+x=0$, $x(x-1)^2=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ (중근)

STEP 3 넓이 구하기

이때 두 곡선 $y=x^3-2x^2+2x$, $x=y^3-2y^2+2y$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=x^3-2x^2+2x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$2\int_0^1 \{(x^3-2x^2+2x)-x\}dx$

$=2\int_0^1 (x^3-2x^2+x)dx$

$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

13

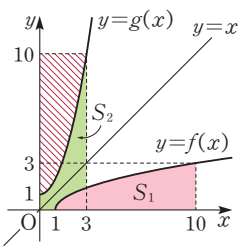
해결전략 | 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계를 이용하여 도형을 대칭이동시켜 넓이를 간단히 구한다.

STEP 1 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계 알기

함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$의 역함수가 $g(x)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

STEP 2 넓이가 같은 부분 찾기

$\int_1^{10} f(x)dx=S_1$, $\int_0^3 g(x)dx=S_2$라고 하면 다음 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 S_1과 같다.



STEP 3 정적분의 값 구하기

$\therefore \int_1^{10} f(x)dx+\int_0^3 g(x)dx=S_1+S_2=3\times 10=30$

14

해결전략 | 다시 출발점으로 돌아올 때는 위치의 변화량이 0임을 이용하여 식을 세운다.

STEP 1 위치의 변화량이 0이 되는 식 세우기

a초 후에 점 P가 원점으로 다시 돌아온다고 하면 점 P의 위치의 변화량이 0이므로

$\int_0^a (-3t^2+6t+18)dt=0$

STEP 2 a의 값을 구하여 시간 구하기

$\left[-t^3+3t^2+18t\right]_0^a=0$

$-a^3+3a^2+18a=0$

$a(a+3)(a-6)=0$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$

따라서 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 데 걸리는 시간은 6초이다.

15

해결전략 I 두 점의 위치를 구하는 식을 구한 다음 위치가 같게 되는 시각을 구한다.

STEP 1 점 A, B의 a초 후의 위치 구하기

두 점 A, B의 출발점을 원점으로 하고 시각 $t=a$에서의 위치를 각각 $x_A(a)$, $x_B(a)$라고 하면

$$x_A(a)=0+\int_0^a(6t^2-4t+4)dt$$
$$=\left[2t^3-2t^2+4t\right]_0^a=2a^3-2a^2+4a$$
$$x_B(a)=0+\int_0^a(3t^2+4t+1)dt$$
$$=\left[t^3+2t^2+t\right]_0^a=a^3+2a^2+a$$

STEP 2 위치가 같게 되는 a의 값 구하기

이때 두 점 A, B가 서로 만날 때는 $x_A(a)=x_B(a)$일 때이므로

$2a^3-2a^2+4a=a^3+2a^2+a$

$a^3-4a^2+3a=0$

$a(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$

STEP 3 만나는 횟수 구하기

따라서 두 점 A, B는 출발 후 $a=1$, $a=3$일 때 다시 만나므로 서로 만나는 횟수는 2이다.

16

해결전략 I 속도가 같아지는 시각을 구한 다음 점의 위치를 구한다.

STEP 1 속도가 같아지는 시각 구하기

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간의 t의 값은

$3t^2+t=2t^2+3t$에서

$t^2-2t=0$, $t(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 $t=2$일 때 두 점 P, Q의 속도가 같아진다.

STEP 2 $t=2$일 때 두 점의 위치 구하기

$t=2$일 때 두 점 P, Q의 위치를 구하면

$$\int_0^2 v_1(t)dt=\int_0^2(3t^2+t)dt$$
$$=\left[t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=10$$
$$\int_0^2 v_2(t)dt=\int_0^2(2t^2+3t)dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^2=\frac{34}{3}$$

STEP 3 $9a$의 값 구하기

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리 a는

$a=\frac{34}{3}-10=\frac{4}{3}$

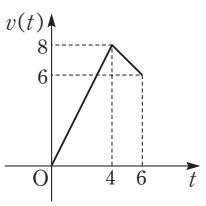
$\therefore 9a=9\times\frac{4}{3}=12$

17

해결전략 I 속도의 그래프를 그린 다음 그래프와 x축 사이의 넓이를 구한다.

STEP 1 속도의 그래프 그리기

속도 $v(t)$가 나타내는 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. ····· ❶



STEP 2 움직인 거리 구하기

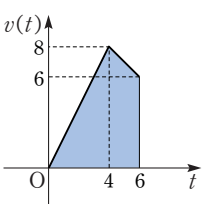
시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는

$$\int_0^6|v(t)|dt=\int_0^4 2tdt+\int_4^6(-t+12)dt \quad \cdots\cdots ❷$$
$$=\left[t^2\right]_0^4+\left[-\frac{1}{2}t^2+12t\right]_4^6$$
$$=16+14=30 \quad \cdots\cdots ❸$$

다른 풀이

STEP 2 움직인 거리 구하기

$$\int_0^6|v(t)|dt$$
$$=\int_0^4 2tdt+\int_4^6(-t+12)dt$$ → 사다리꼴의 넓이
$$=\frac{1}{2}\times4\times8+\frac{1}{2}\times(6+8)\times2$$ → 삼각형의 넓이
$$=16+14=30$$



채점 요소	배점
❶ 속도의 그래프 그리기	40 %
❷ 움직인 거리를 구하는 식 세우기	40 %
❸ 움직인 거리 구하기	20 %

상위권 도약 문제 319~320쪽

01 $4\sqrt{3}$ **02** ④ **03** 4 **04** $\frac{9}{5}$ **05** ③

06 45 **07** $\frac{27}{4}$

01

해결전략 | 교점의 x좌표를 α, β로 놓고 근과 계수의 관계와 곱셈 공식의 변형을 이용하여 넓이를 간단히 나타낸다.

STEP 1 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기

점 $(0, 3)$을 지나는 직선의 기울기를 m이라고 하면 직선의 방정식은 $y=mx+3$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=mx+3$의 교점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면 α, β는 방정식 $x^2=mx+3$,

즉 $x^2-mx-3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=-3$ ····· ㉠

STEP 2 넓이를 α, β로 나타내기

한편, 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=mx+3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하면

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}(mx+3-x^2)dx=\left[\frac{m}{2}x^2+3x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{m}{2}(\beta^2-\alpha^2)+3(\beta-\alpha)-\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)$$

$$=(\beta-\alpha)\left\{\frac{m}{2}(\beta+\alpha)+3-\frac{1}{3}(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)\right\}$$

STEP 3 넓이를 m에 대한 식으로 나타내기

㉠에서 $(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=m^2+12$이므로

$\beta-\alpha=\sqrt{m^2+12}$ $(\because \alpha<\beta)$

$$\therefore S=\sqrt{m^2+12}\left\{\frac{1}{2}m^2+3-\frac{1}{3}(m^2+3)\right\}$$

$$=\sqrt{m^2+12}\left(\frac{1}{6}m^2+2\right)$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{m^2+12}(m^2+12)$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{(m^2+12)^3}$$

STEP 4 넓이의 최솟값 구하기

따라서 $m^2\geq0$이므로 구하는 넓이 S는 $m=0$일 때 최소이고 최솟값은 $4\sqrt{3}$이다.

02

해결전략 | 절댓값 기호를 포함한 함수를 x의 값의 범위에 따라 나누어 곡선과의 교점의 x좌표를 구한 다음 넓이를 구한다.

STEP 1 곡선과 직선의 교점의 x좌표 구하기

$$y=|x-1|=\begin{cases}-x+1 & (x<1)\\ x-1 & (x\geq1)\end{cases}$$

(i) $x<1$일 때

곡선 $y=x^2-2x-1$과 직선 $y=-x+1$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x-1=-x+1$에서

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

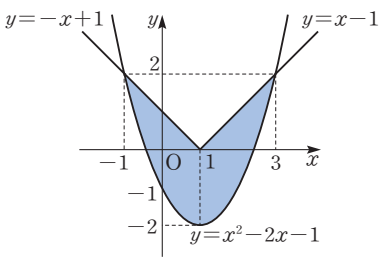
$\therefore x=-1$ $(\because x<1)$

(ii) $x\geq1$일 때

곡선 $y=x^2-2x-1$과 직선 $y=x-1$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x-1=x-1$에서

$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore x=3$ $(\because x\geq1)$



STEP 2 직선 $x=1$에 대하여 대칭임을 이용하여 넓이 구하기

곡선 $y=x^2-2x-1$과 직선 $y=|x-1|$로 둘러싸인 도형은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $x^2-2x-1\leq-x+1$이므로 구하는 넓이는

$$2\int_{-1}^{1}\{(-x+1)-(x^2-2x-1)\}dx$$

$$=2\int_{-1}^{1}(-x^2+x+2)dx$$

$$=4\int_{0}^{1}(-x^2+2)dx$$

$$=4\left[-\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1$$

$$=4\times\frac{5}{3}=\frac{20}{3}$$

◉→ 다른 풀이

STEP 2 넓이 구하기

$$\int_{-1}^{1}\{(-x+1)-(x^2-2x-1)\}dx$$

$$+\int_{1}^{3}\{(x-1)-(x^2-2x-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+x+2)dx+\int_{1}^{3}(-x^2+3x)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+2)dx+\int_{1}^{3}(-x^2+3x)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^3$$

$$=2\times\frac{5}{3}+\frac{10}{3}=\frac{20}{3}$$

풍쌤의 비법

절댓값 기호를 포함하고 있는 함수의 정적분의 값을 구할 때는 절댓값 기호 안의 식을 0으로 하는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 함수를 나타낸 다음 정적분의 성질 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$를 이용한다.

03

해결전략 I 정적분으로 주어진 함수를 미분하여 $f(x)$를 구한 다음 넓이를 구한다.

STEP 1 $f(x)$ 구하기

$\int_3^x f(t)dt=x^3-kx^2$의 양변에 $x=3$을 대입하면

$\int_3^3 f(t)dt=27-9k=0 \quad \therefore k=3$

$\int_3^x f(t)dt=x^3-3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-6x$

STEP 2 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

곡선 $f(x)=3x^2-6x$와 x축의 교점의 x좌표는

$3x^2-6x=0$에서 $3x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

STEP 3 넓이 구하기

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 |3x^2-6x|dx=\int_0^2 (6x-3x^2)dx$$
$$=\left[3x^2-x^3\right]_0^2=4$$

풍쌤의 비법

$\int_a^x tf(t)dt=g(x)$와 같이 적분 구간에 변수 x가 있는 경우

① 양변에 $x=a$를 대입하여 미지수의 값을 구한다.

② 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$를 구한다.

이때 적분변수가 t이면 x는 상수로 취급한다.

04

해결전략 I 먼저 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구한 다음 우함수인 $f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭임과 주어진 조건을 이용하여 정적분의 값이 0이 되는 경우를 찾는다.

STEP 1 곡선과 x축의 교점의 x좌표 구하기

$f(x)=(x^2-9)(x^2-a)=0$에서

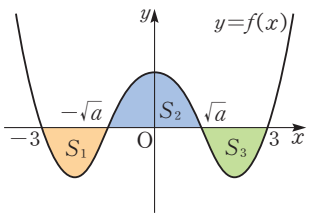
$(x+3)(x-3)(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$

$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$ 또는 $x=3$

STEP 2 $\int_0^3 f(x)dx$의 값 구하기

이때 $0<a<9$이므로 $0<\sqrt{a}<3$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$f(-x)=\{(-x)^2-9\}\{(-x)^2-a\}$$
$$=(x^2-9)(x^2-a)$$
$$=f(x)$$

이므로 $f(x)$는 우함수이다.

$\therefore \int_{-3}^3 f(x)dx=2\int_0^3 f(x)dx$

주어진 조건에서 $S_1-S_2+S_3=0$이므로

$S_2=S_1+S_3$

즉, $2\int_0^3 f(x)dx=0$이므로 $\int_0^3 f(x)dx=0$ ····· ㉠

STEP 3 a의 값 구하기

㉠에 $f(x)=(x^2-9)(x^2-a)$를 대입하면

$$\int_0^3 (x^2-9)(x^2-a)dx$$
$$=\int_0^3 \{x^4-(a+9)x^2+9a\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{a+9}{3}x^3+9ax\right]_0^3$$
$$=-\frac{162}{5}+18a=0$$

$\therefore a=\frac{9}{5}$

05

해결전략 I $y=-f(x-1)-1$을 구한 다음 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하여 넓이를 구한다.

STEP 1 $y=-f(x-1)-1$ 정리하기

$$y=-f(x-1)-1$$
$$=-(x-1)^2+2(x-1)-1$$
$$=-x^2+4x-4$$

STEP 2 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기

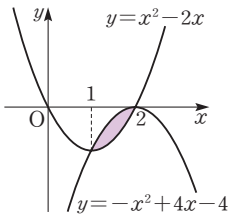
곡선 $y=-x^2+4x-4$와 곡선 $y=x^2-2x$의 교점의 x좌표는 $-x^2+4x-4=x^2-2x$에서

$2x^2-6x+4=0$

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$



STEP 3 넓이 구하기

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^2\{(-x^2+4x-4)-(x^2-2x)\}dx$$

$$=\int_1^2(-2x^2+6x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}$$

06

해결전략 | 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리는 $\int_0^a|v(t)|dt$임을 이용하여 식을 세워 a의 값을 구한다.

STEP 1 $a>2$임을 알기

$v(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$이므로

$v(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

점 P가 원점을 출발하여 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리가 58이므로 $a>2$

STEP 2 움직인 거리를 a에 대한 식으로 나타내기

$$\int_0^a|3t^2-6t|dt=-\int_0^2(3t^2-6t)dt+\int_2^a(3t^2-6t)dt$$

$$=-\left[t^3-3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^a$$

$$=-(-4)+(a^3-3a^2+4)$$

$$=a^3-3a^2+8=58$$

STEP 3 a의 값 구하기

$a^3-3a^2-50=0$

$(a-5)(a^2+2a+10)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a^2+2a+10>0$)

$\therefore v(5)=75-30=45$

07

해결전략 | 정적분으로 나타내어진 함수를 결정한 다음 두 함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

STEP 1 $\int_0^2g(x)dx=a$, $\int_0^2f(x)dx=b$로 놓고 $f(x)$, $g(x)$ 정하기

$\int_0^2g(x)dx=a$, $\int_0^2f(x)dx=b$라고 하면

$f(x)=3x^2+a$, $g(x)=-x^3+3bx^2$

STEP 2 $f(x)$, $g(x)$ 구하기

$$a=\int_0^2(-x^3+3bx^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+bx^3\right]_0^2=8b-4$$

$\therefore a=8b-4$ ····· ㉠

$$b=\int_0^2(3x^2+a)dx$$

$$=\left[x^3+ax\right]_0^2=2a+8$$

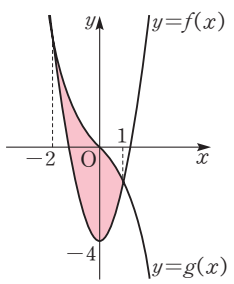
$\therefore b=2a+8$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=0$

$\therefore f(x)=3x^2-4$, $g(x)=-x^3$

STEP 3 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



두 곡선의 교점의 x좌표는

$3x^2-4=-x^3$에서

$x^3+3x^2-4=0$

$(x-1)(x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$(중근) 또는 $x=1$

STEP 4 넓이 구하기

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^1\{-x^3-(3x^2-4)\}dx=\int_{-2}^1(-x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-2}^1=\frac{27}{4}$$